# Úlohy domácího kola kategorie A

**1.** *V urně jsou jen bílé a černé kuličky, jejichž počet zaokrouhlen na stovky je 1 000. Pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček je o $\frac{17}{43}$ větší než pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček. Kolik bílých a kolik černých kuliček je v urně? (Pravděpodobnost vytažení kterékoli kuličky je stejná.)*

Řešení. Nechť je v urně $n$ kuliček, z toho $b$ bílých (a $n-b$ černých). Potom pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček je rovna podílu

$$\frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)},$$

zatímco pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček podílu

$$\frac{\binom{n-b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)}.$$

Podle zadání úlohy platí rovnost

$$\frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)} + \frac{17}{43},$$

kterou lze algebraickými úpravami zjednodušit do tvaru $43b = 13n$ (pro $n \notin \{0,1\}$ jde o ekvivalentní rovnice). Odtud vzhledem k nesoudělnosti čísel 13 a 43 plyne, že přirozená čísla $n$ a $b$ jsou tvaru $n = 43k$ a $b = 13k$, kde $k$ je vhodné přirozené číslo. Podle zadání pro číslo $n$ platí odhady $950 \leqq n < 1\,050$, z nichž zjistíme, že $k \in \{23, 24\}$. Pro $k = 23$ vychází $n = 989$ a $b = 299$ (tehdy $n - b = 690$), zatímco hodnotě $k = 24$ odpovídá $n = 1\,032$ a $b = 312$ (tehdy $n - b = 720$).

*Odpověď*: Úloha má dvě řešení — v urně je buď 299 bílých a 690 černých, nebo 312 bílých a 720 černých kuliček.

**2.** *Nechť $a_1$, $a_2$ jsou přirozená čísla a nechť pro každé přirozené $n \geqq 2$ je číslo $a_{n+1}$ o 1 větší než největší lichý dělitel součtu $a_n + a_{n-1}$. Dokažte, že posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je od určitého členu počínaje periodická. Najděte všechny takové posloupnosti, jež jsou periodické už od prvního členu.*

Řešení. Zvolíme-li přirozená čísla $a_1$, $a_2$ libovolně, jsou všechny následující členy $a_3$, $a_4$, ... zkoumané posloupnosti jednoznačně určeny rekurentním předpisem

$$a_{n+1} = 1 + (a_n + a_{n-1})^* \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

kde $a^*$ značí největší lichý dělitel přirozeného čísla $a$. Doporučme nejdříve řešitelům, aby pro několik „počátečních“ dvojic $a_1$, $a_2$ vypočetli tolik prvních členů $a_n$, ze kterých už bude jasné, kde začíná a jak vypadá perioda dotyčné posloupnosti.[1] Několik příkladů uvádíme v následující tabulce.

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | ... |
| 2 | 1 | 4 | 6 | 6 | 4 | 6 | 6 | 4 | 6 | ... |
| 1 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | ... |
| 1 | 3 | 2 | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | ... |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | ... |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | ... |
| 1 | 4 | 6 | 6 | 4 | 6 | 6 | 4 | 6 | 6 | ... |
| 2 | 3 | 6 | 10 | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | ... |
| 3 | 2 | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | ... |
| 4 | 1 | 6 | 8 | 8 | 2 | 6 | 2 | 2 | 2 | ... |

(Pro větší hodnoty $a_1$, $a_2$ se perioda často objeví „později“, jak ukazuje příklad posloupnosti $30, 31, 62, 94, 40, 68, 60, 2, 32, 18, 26, 12, 20, 2, 12, 8, 6, 8, 8, 2, 6, 2, 2 \ldots$)

Žáci si jistě uvědomí, že posloupnost vytvořená podle předpisu (1) je od jistého členu, řekněme $a_n$, periodická, právě když existuje takový index $m$, že platí

$$m > n, \quad a_m = a_n \quad \text{a} \quad a_{m+1} = a_{n+1}. \tag{2}$$

Vlastní řešení úlohy zahájíme tak, že dokážeme čtyři tvrzení (T1) až (T4), která platí pro každou zkoumanou posloupnost $\{a_n\}$ a která lze vypozorovat z příkladů uvedených v tabulce.

(T1) *Číslo $a_n$ je sudé pro každé $n \geqq 3$.*

Důkaz (T1) je triviální: protože je číslo $a^*$ liché pro každé $a$, je pravá strana rovnosti v (1) sudá.

(T2) *Nerovnost $a_n \leqq \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$ platí pro každé $n \geqq 5$.*

Důkaz (T2): Protože pro sudé $a$ platí $a^* \leqq \frac{1}{2}a$ a pro každé $n \geqq 5$ jsou podle (T1) obě čísla $a_{n-1}$, $a_{n-2}$ sudá, platí pro takové $n$ odhad

$$a_n = 1 + (a_{n-1} + a_{n-2})^* \leqq 1 + \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \leqq 1 + \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$$

[1] Je téměř nemyslitelné řešit takové neobvyklé úlohy bez podobného úvodního experimentování. Proto experimenty patří k výzkumu v matematice stejně jako v jiných přírodních vědách.

(neboť aritmetický průměr dvou čísel nepřevyšuje větší z nich). Zjistili jsme, že sudé číslo $a_n$ nepřevyšuje liché číslo $1 + \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$, tudíž nepřevyšuje ani číslo o 1 menší, číslo $\max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$.

Z dokázaného tvrzení (T2) plyne, že každá zkoumaná posloupnost $\{a_n\}$ má největší člen (a ten se navíc rovná jednomu z čísel $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$). Ukažme, jak snadno již odtud plyne tvrzení o periodičnosti posloupnosti $\{a_n\}$: značí-li $M$ její největší člen, je každá z nekonečně mnoha dvojic $(a_n, a_{n+1})$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ rovna jedné z $M^2$ dvojic $(a, b)$, kde $a, b \in \{1, 2, \dots, M\}$. Proto existují dva různé indexy, řekněme $n < m$, pro které platí $(a_n, a_{n+1}) = (a_m, a_{m+1})$, tj. podmínka (2). Pak ovšem indukcí z (1) plyne, že $a_{n+k} = a_{m+k}$ pro každé $k \geqq 0$. Proto je posloupnost $\{a_n\}$ periodická. První část úlohy je tak vyřešena.

Zdůrazněme ještě, že tvrzení (T2) neznamená, že posloupnost $\{a_n\}$ je od některého členu nerostoucí (vyvracejí to příklady z naší tabulky). Platí ale:

(T3) *Existuje index $n_0$ (závislý na posloupnosti $\{a_n\}$) takový, že pro každé $n \geqq n_0$ platí rovnost* $\max\{a_{n-1}, a_{n-2}\} = \max\{a_n, a_{n-1}\}$.

Důkaz (T3): Položme $b_n = \max\{a_n, a_{n-1}\}$ pro každé $n \geqq 4$. Podle (T2) pro každé $n \geqq 5$ platí $a_n \leqq b_{n-1}$, což spolu s triviální rovností $a_{n-1} \leqq b_{n-1}$ vede k závěru, že $b_n \leqq b_{n-1}$. Posloupnost přirozených čísel $b_4$, $b_5$, $b_6$, …je tedy nerostoucí, proto je od jistého členu, řekněme $b_{n_0}$, konstantní. Důkaz (T3) je hotov.

(T4) *Pro každé $n \geqq n_0$, kde $n_0$ je index z* (T3), *platí implikace: jestliže $a_n > a_{n+1}$, pak $a_n - a_{n+1} = 2$.*

Důkaz (T4): Pokud $a_n > a_{n+1}$ pro některé $n \geqq n_0$, pak $a_n \geqq a_{n+1} + 2$ podle (T1) a z rovnosti $\max\{a_{n+1}, a_n\} = \max\{a_{n+2}, a_{n+1}\}$ obsažené v (T3) vyplývá, že $a_n = a_{n+2}$, což podle (1) znamená, že $a_n = 1 + (a_n + a_{n+1})^*$. Číslo $a_n - 1$ je tedy dělitelem (většího) čísla $a_n + a_{n+1}$, a tak platí nerovnost $a_n + a_{n+1} \geqq 2(a_n - 1)$, odkud $a_n \leqq a_{n+1} + 2$. Protože platí i obrácená nerovnost (viz výše), je důkaz (T4) ukončen.

S pomocí tvrzení (T3) a (T4) teď dokončíme řešení úlohy. (Ukáže se, že všechny možné periodické skupiny členů lze vyčíst z naší tabulky.) Uvažujme i nadále libovolnou zkoumanou posloupnost $\{a_n\}$ a jí příslušný index $n_0$ z (T3). Mohou nastat dva případy:

(i) nerovnost $a_n \leqq a_{n+1}$ platí pro každé $n \geqq n_0$,

(ii) pro některé $n \geqq n_0$ platí $a_n > a_{n+1}$.

V případě (i) z (T3) plyne indukcí, že $a_n = a_{n_0}$ pro každé $n \geqq n_0$. Možnou hodnotu $c = a_{n_0}$ najdeme podle (1) z rovnosti $c = 1 + (2c)^*$. Protože $(2c)^* = c^*$, dostáváme $c^* = c - 1$. Číslo $c - 1$ je však dělitelem čísla $c$ zřejmě jen pro $c = 2$. Zkoumaná posloupnost je tedy tvaru

$$a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, 2, 2, 2, \dots \tag{3}$$

V případě (ii) z nerovnosti $a_n > a_{n+1}$ podle (T4) plyne $a_n = 2d$ a $a_{n+1} = 2d - 2$ pro vhodné celé $d > 1$ (připomeňme, že $a_n$ je sudé podle (T1)). Podle předpisu (1) pak dostáváme

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= 1 + (2d + 2d - 2)^* = 1 + (2d - 1) = 2d,\\
a_{n+3} &= 1 + (2d - 2 + 2d)^* = 1 + (2d - 1) = 2d,\\
a_{n+4} &= 1 + (2d + 2d)^* = 1 + d^*.
\end{aligned}$$

Pro $d > 1$ ovšem platí $2d > 1 + d \geqq 1 + d^*$, a tak $a_{n+3} > a_{n+4}$. To opět podle (T4) znamená, že $a_{n+3} - a_{n+4} = 2$, neboli $(2d) - (1 + d^*) = 2$, odkud $2d - 3 = d^* \leqq d$, takže $d \leqq 3$. V případě $d = 2$ je zkoumaná posloupnost tvaru

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 4, 2, 4, 4, 2, 4, 4, 2, \ldots, \tag{4}$$

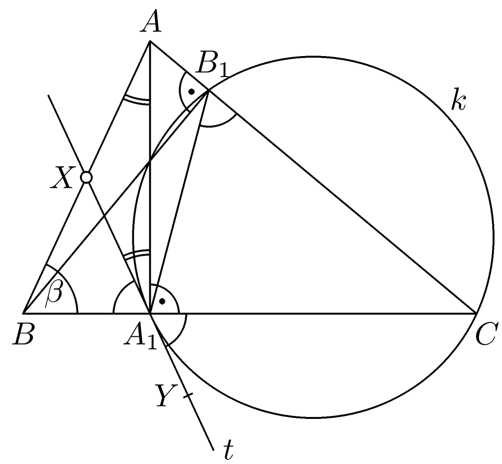
zatímco pro $d = 3$ má tvar

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 6, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 4, \ldots \tag{5}$$

Dokázali jsme, že *každá* posloupnost ze zadání úlohy je jednoho z tvarů (3), (4), (5). Odtud již plyne, že periodické od prvního členu jsou právě ty posloupnosti, které mají dvojici prvních členů $(a_1, a_2)$ rovnu jedné ze sedmi dvojic $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$ a $(6, 6)$.

**3.** *V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Paty výšek z vrcholů $A$, $B$ označme po řadě $A_1$, $B_1$. Tečny kružnice opsané trojúhelníku $CA_1B_1$ sestrojené v bodech $A_1$, $B_1$ se protínají v bodě $M$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $AMB_1$, $BMA_1$, $CA_1B_1$ procházejí jedním bodem.*

Řešení. Označme $k$ kružnici opsanou trojúhelníku $CA_1B_1$. V první části řešení ukážeme, že bod $M$ z textu úlohy je středem strany $AB$. Protože trojúhelník $ABC$ je ostroúhlý, leží paty $A_1$, $B_1$ příslušných výšek uvnitř odpovídajících stran. S ohledem na symetrii dané situace stačí uvažovat jen tečnu $t$ ke kružnici $k$ sestrojenou v bodě $A_1$, označit $X$ její průsečík s přímkou $AB$ a dokázat rovnost $|AX| = |BX|$ (obr. 1).



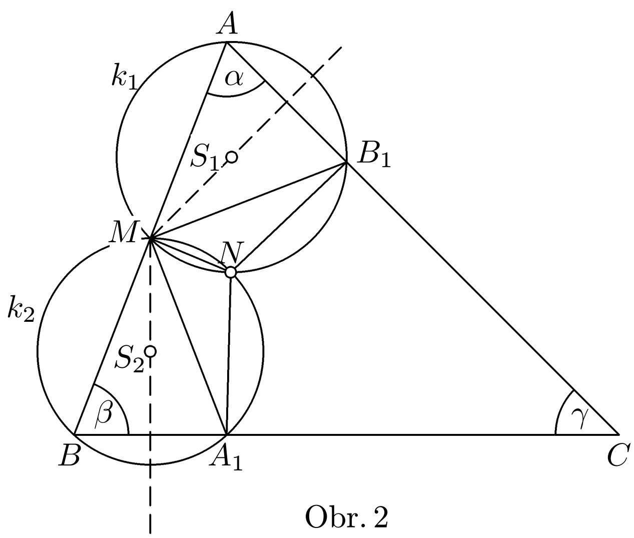

Obr. 1

Označme ještě $Y$ libovolný vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce $A_1X$. Protože jsou oba úhly $AA_1B$ a $BB_1A$ pravé, je čtyřúhelník $ABA_1B_1$ tětivový, a tak platí $|\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - |\sphericalangle ABA_1| = 180° - \beta$, kde jako obvykle $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Proto má obvodový úhel $A_1B_1C$ v kružnici $k$ nad tětivou $A_1C$ velikost $|\sphericalangle A_1B_1C| = 180° - |\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - (180° - \beta) = \beta$, stejnou velikost má i příslušný úsekový úhel $YA_1C$.[2] Protože úhly $XA_1B$ a $YA_1C$ jsou vrcholové, dohromady dostáváme

[2] K pojmu úsekového úhlu a jeho shodnosti s obvodovým úhlem viz S. Horák: *Kružnice*, ŠMM 16, MF, Praha 1966, str. 3–7.

$|\sphericalangle XA_1B| = |\sphericalangle YA_1C| = |\sphericalangle A_1B_1C| = \beta$ (tyto shodné úhly jsou na obr. 1 vyznačeny obloučky). Zároveň platí i $|\sphericalangle XA_1A| = |\sphericalangle XAA_1| = 90° - \beta$. Zjistili jsme, že tečna $t$ protne přímku $AB$ v takovém bodě $X$, pro který jsou trojúhelníky $BA_1X$ a $A_1AX$ rovnoramenné, tj. $|BX| = |A_1X| = |AX|$.

Dokázali jsme, že bod $M$ (průsečík tečen ke kružnici $k$ s body dotyku $A_1$ a $B_1$) splývá se středem strany $AB$. Označme nyní $k_1$ a $k_2$ kružnice opsané po řadě trojúhelníkům $AMB_1$ a $BMA_1$ a $S_1$, $S_2$ jejich středy (obr. 2). Jedním průsečíkem kružnic $k_1$



Obr. 2

a $k_2$ je bod $M$, druhý průsečík označme $N$. Protože body $S_1$, $S_2$ leží v polorovině $ABC$, leží v ní i bod $N$, neboť je souměrně sdružený s $M$ podle středné $S_1S_2$. Naší úlohou je dokázat, že bod $N$ leží na jedné kružnici s body $A_1$, $B_1$ a $C$.

Jak už víme, je trojúhelník $BA_1M$ rovnoramenný, a protože $|\sphericalangle BB_1M| = 90° - \alpha < \beta = |\sphericalangle BA_1M|$ (tato nerovnost je ekvivalentní tomu, že $\gamma < 90°$), leží bod $B_1$ vně kružnice $k_2$. To znamená, že kružnice $k_2$ musí protínat kružnici $k_1$ v tom jejím oblouku nad tětivou $MB_1$, který odpovídá obvodovému úhlu $180° - \alpha$. Analogicky zjistíme, že bod $A_1$ leží vně kružnice $k_1$, takže průsečík $N$ leží na oblouku kružnice $k_2$ příslušného tětivě $MA_1$ a obvodovému úhlu $180° - \beta$. Protože zároveň

$$|\sphericalangle B_1NM| + |\sphericalangle A_1NM| = (180° - \alpha) + (180° - \beta) = 360° - (\alpha + \beta) = 180° + \gamma > 180°,$$

musí bod $N$ ležet uvnitř trojúhelníku $A_1B_1M$ (přímka $A_1B_1$ tedy odděluje body $C$ a $N$). Protože $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (kde $\gamma = |\sphericalangle A_1CB_1|$), plyne odtud, že ve čtyřúhelníku $A_1CB_1N$ je součet vnitřních úhlů u protilehlých vrcholů $C$ a $N$ roven $180°$, a tak je tento čtyřúhelník skutečně tětivový.

**4.** *V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic*

$$\sin x + \cos y \geqq \sqrt{2},$$
$$\sin y + \cos z \geqq \sqrt{2},$$
$$\sin z + \cos x \geqq \sqrt{2}.$$

Řešení. Sečtením všech tří daných nerovnic dostaneme nerovnost

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) + (\sin z + \cos z) \geqq 3\sqrt{2}. \tag{1}$$

Na druhou stranu pro každé reálné číslo $t$ platí[3]

$$\begin{aligned}\sin t + \cos t &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right) = \sqrt{2}\left(\sin t\cos\frac{\pi}{4} + \cos t\sin\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2},\end{aligned} \tag{2}$$

neboť $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$; přitom rovnost v druhém řádku (2) nastane, právě když $t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, neboli $t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ pro některé celé číslo $k$. Sečtením tří odhadů (2) pro $t = x$, $t = y$ a $t = z$ dostaneme nerovnost

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) + (\sin z + \cos z) \leqq 3\sqrt{2}. \tag{3}$$

Zdůrazněme, že nerovnost (3) platí pro *libovolnou trojici* reálných čísel $(x, y, z)$, zatímco opačná nerovnost (1) platí pro *každé řešení* původní soustavy. Tak zjišťujeme, že nerovnost (1) může být splněna jedině jako rovnost, což se podle předchozího stane, právě když čísla $x$, $y$, $z$ budou tvaru

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, \quad y = \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi, \quad z = \frac{\pi}{4} + 2k_3\pi \quad (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}).$$

Dosazením do původní soustavy se snadno přesvědčíme, že každá taková trojice čísel $(x, y, z)$ je skutečně řešením, platí pro ni totiž

$$\sin x = \cos x = \sin y = \cos y = \sin z = \cos z = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Zmínka o zkoušce byla nutná, protože nerovnost (1) je pouze *důsledkem* zadané soustavy: nemohli jsme vyloučit, že pro některou trojici čísel $(x, y, z)$ platí (1), avšak neplatí některá ze tří původních nerovností.)

*Poznámka.* Nerovnost (2) můžeme snadno získat z nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem:

$$\sin t + \cos t \leqq |\sin t| + |\cos t| \leqq 2\sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{2}} = \sqrt{2}.$$

K řešení úlohy lze místo (1) využít i jiných důsledků dané soustavy. Přepišme například první z daných nerovnic do tvaru $\sin x \geqq \sqrt{2} - \cos y$. Platí-li tato nerovnost,

[3] Provedeme úpravu, kterou běžně používáme při řešení rovnic typu $a\sin t + b\cos t = c$. Jiná možnost je použít nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem, viz poznámku na konci řešení.

platí i umocněná nerovnost $\sin^2 x \geqq (\sqrt{2} - \cos y)^2$, neboť $\sqrt{2} - \cos y > 0$ pro každé $y \in \mathbb{R}$. Sečtením tří nerovností

$$\sin^2 x \geqq (\sqrt{2} - \cos y)^2,\ \sin^2 y \geqq (\sqrt{2} - \cos z)^2,\ \sin^2 z \geqq (\sqrt{2} - \cos x)^2$$

dostaneme po úpravách nerovnost

$$0 \geqq \bigl(1 - \sqrt{2}\cos x\bigr)^2 + \bigl(1 - \sqrt{2}\cos y\bigr)^2 + \bigl(1 - \sqrt{2}\cos z\bigr)^2,$$

ze které už plyne vše potřebné.

Řešení úlohy můžeme zahájit ještě jedním způsobem. Umocněme nejdříve každou ze tří daných nerovnic na druhou (jde o důsledkovou úpravu, neboť menší (pravá) strana nerovnice je kladná) a pak je sečtěme. Po snadné úpravě vyjde nerovnost

$$2\sin x \cos y + 2\sin y \cos z + 2\sin z \cos x \geqq 3.$$

O obecné platnosti opačné nerovnosti se přesvědčíme tak, že každý ze tří členů na levé straně odhadneme shora pomocí „klasické“ nerovnosti $2uv \leqq u^2 + v^2$ (jež je ostrá v případě $u \neq v$):

$$\begin{aligned}&2\sin x \cos y + 2\sin y \cos z + 2\sin z \cos x \leqq \\ &\leqq (\sin^2 x + \cos^2 y) + (\sin^2 y + \cos^2 z) + (\sin^2 z + \cos^2 x) = 3.\end{aligned}$$

(Tak odvodíme nutné podmínky $\sin x = \cos y$, $\sin y = \cos z$, $\sin z = \cos x$, za kterých je řešení původní soustavy již triviální úlohou.)

**5.** *Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla $x$, $y$ platí*

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x + y) \cdot \bigl(f(x) + f(y)\bigr).$$

Mnozí studenti patrně nikdy funkcionální rovnice neřešili, proto jim nejdříve vysvětlíme, že z rovnice pro neznámou funkci $f$, která platí pro libovolné hodnoty proměnných $x$ a $y$, získáváme důležité informace o funkci $f$ často tak, že do dané rovnice za jednu nebo obě z proměnných $x, y$ dosadíme vhodná čísla (předem ovšem většinou nevíme, zda takové dosazení bude přínosné, často proto „dosazovací proceduru“ několikrát opakujeme, dokud něco významného nezjistíme). Ilustrujme to velmi jednoduchým příkladem: najdeme všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že rovnost $f(x + y) = x + f(y)$ platí pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li do dané rovnosti $x = 0$, zjistíme, že pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí $f(0 + y) = 0 + f(y)$. Je to zklamání: vyšla nám „nicneříkající“ rovnost $f(y) = f(y)$. Zato po dosazení $y = 0$ do původní rovnice dostaneme $f(x + 0) = x + f(0)$, neboli $f(x) = x + f(0)$. Podtrhněme, že poslední rovnost platí pro každé $x \in \mathbb{R}$; můžeme ji proto přečíst jako předpis pro výpočet libovolné hodnoty hledané funkce $f$: číslo $f(x)$ dostaneme, když k příslušnému $x$ přičteme jistou (prozatím neznámou) konstantu $f(0)$. To znamená, že neznámá funkce $f$ je už téměř „odhalena“: je to funkce určená předpisem $f(x) = x + c$ $(x \in \mathbb{R})$, ve kterém ještě neznáme číslo $c$ (z předchozího víme, že

$c = f(0)$, uvědomíme si to ostatně, když do nalezeného předpisu $f(x) = x + c$ dosadíme $x = 0$). V této chvíli přirozeně vzniká otázka, pro které $c \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = x + c$ ($x \in \mathbb{R}$) řešením naší úlohy? Odpověď jednoduše najdeme tak, že provedeme „zkoušku“: do dané rovnice $f(x + y) = x + f(y)$ dosadíme za funkční hodnoty $f(x + y)$, $f(y)$ po řadě výrazy $(x + y) + c$ a $y + c$. Dostaneme tak rovnost $(x + y) + c = x + (y + c)$. Otázka teď zní: při jakém čísle $c$ je poslední rovnost splněna pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$? Samozřejmě, že při libovolném $c \in \mathbb{R}$! Proto je hledaných funkcí $f$ nekonečně mnoho a jsou to právě funkce určené předpisem $f(x) = x+c$, kde $c$ je libovolná konstanta. Tolik na úvod k problematice funkcionálních rovnic, další informace pro řešitele MO lze čerpat z brožur F. Neuman: *Funkcionální rovnice*, SNTL, Praha 1986; J. Smítal: *O funkciách a funkcionálnych rovniciach*, Alfa, Bratislava 1984; L. Davidov: *Funkcionální rovnice*, ŠMM 55, MF, Praha 1984.

Vlastní řešení funkcionální rovnice

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x + y) \cdot \bigl(f(x) + f(y)\bigr) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

zahájíme tak, že vypíšeme přehled všech výsledků dosazení, které budeme dále potřebovat (písmeno $a$ značí libovolné reálné číslo):

$$\begin{array}{lll}
\text{(D1)} & x = 0,\ y = 0: & f(0) = (f(0))^2, \\
\text{(D2)} & x = 0,\ y = a: & a^2 + 2f(0) = f(a) \cdot (f(a) + f(0)), \\
\text{(D3)} & x = a,\ y = a: & a^2 + f(a^2) = f(a) \cdot f(2a), \\
\text{(D4)} & x = a,\ y = -a: & 2a^2 + 2f(-a^2) = f(0) \cdot (f(a) + f(-a)), \\
\text{(D5)} & x = 1,\ y = 1: & 1 = f(1) \cdot (f(2) - 1).
\end{array}$$

(Některé rovnosti jsme drobně algebraicky upravili.)

Z (D1) plyne, že číslo $f(0)$ je řešením rovnice $t = t^2$, je to tedy číslo $t = 0$ nebo $t = 1$. Diskutujme obě možnosti odděleně.

(i) Případ $f(0) = 0$. Dosadíme-li $f(0) = 0$ do (D2), dostaneme $a^2 = (f(a))^2$, odkud $f(a) = a$ nebo $f(a) = -a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Zdůrazněme, že zatím nevíme, zda pro všechna $x$ platí stejný z obou předpisů $f(x) = x$ resp. $f(x) = -x$ (víme, jen, že existuje $A \subset \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = x$ pro každé $x \in A$ a $f(x) = -x$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus A$).

Ukažme nejprve, že předpis $f(x) = x$ platí pro všechna nekladná $x$: dosadíme-li $f(0) = 0$ do (D4), dostaneme rovnost $f(-a^2) = -a^2$, takže $f(x) = x$ pro všechna ta reálná čísla $x$, která se dají zapsat ve tvaru $x = -a^2$ s vhodným $a \in \mathbb{R}$, a to jsou všechna nekladná $x$. Nyní zdůvodníme, proč $f(x) = x$ rovněž pro všechna kladná $x$: kdyby totiž pro některé $a \neq 0$ neplatilo $f(a^2) = a^2$, platilo by podle předchozího odstavce $f(a^2) = -a^2$, a tak bychom podle (D3) měli $f(a)f(2a) = 0$, což je ale ve sporu s tím, že obě čísla $f(a)$ a $f(2a)$ jsou nenulová (jsou to čísla $\pm a$ resp. $\pm 2a$, předpoklad ale byl, že $a \neq 0$). Tím je dokázáno, že $f(x) = x$ pro každé $x$. Dosazením se snadno ověří, že taková funkce je skutečně řešením naší úlohy.

(ii) Případ $f(0) = 1$. Po dosazení $f(0) = 1$ do (D2) dostaneme pro hodnotu $f(a)$ kvadratickou rovnici $(f(a))^2 + f(a) - a^2 - 2 = 0$. Jejím řešením zjistíme, že

$$f(a) \in \left\{ \frac{-1 + \sqrt{4a^2 + 9}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{4a^2 + 9}}{2} \right\} \quad \text{pro každé } a \in \mathbb{R}.$$

Speciálně pro $a = 1$ a pro $a = 2$ vychází

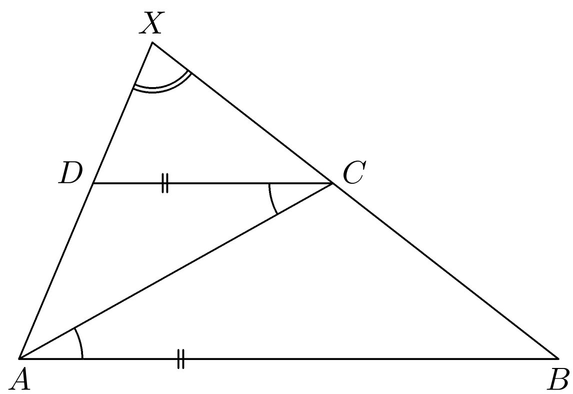
$$f(1) \in \left\{ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right\} \quad \text{a} \quad f(2) \in \{2, -3\},$$

odkud plyne, že číslo $f(1)$ je iracionální, zatímco číslo $f(2) - 1$ je racionální a různé od nuly. Proto je součin $f(1) \cdot (f(2) - 1)$ iracionální, což je ve sporu s (D5). Hledaná funkce $f$ splňující podmínku $f(0) = 1$ tudíž neexistuje.

*Odpověď*: Danou funkcionální rovnici splňuje jediná funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a to funkce určená předpisem $f(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

**6.** *Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4{,}5$ cm, $|DA| = 3$ cm a velikost $75°$ úhlu, který svírají přímky $BC$ a $AD$, platí-li navíc $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$.*

První řešení. Rovnost ze zadání přepišme jako $|AB| : |CA| = |AC| : |CD|$. Tato úměra spolu s rovností střídavých úhlů $BAC$ a $ACD$ (obr. 3) znamená, že trojúhelníky




Obr. 3

$BAC$ a $ACD$ jsou podobné podle věty *sus*. Protože strany $BC$ a $AD$ si v této podobnosti odpovídají a podle zadání platí $|BC| : |AD| = 3 : 2$, platí rovněž $|AB| : |CA| = 3 : 2$ a $|AC| : |CD| = 3 : 2$. Vynásobením posledních dvou rovností dostaneme $|AB| : |CD| = 9 : 4$, takže základna $AB$ lichoběžníku $ABCD$ je delší než základna $CD$. Proto se protínají polopřímky $AD$ a $BC$, jejich průsečík označme $X$. Podle zadání má úhel $CXD$ velikost $75°$ nebo $105°$.

Trojúhelníky $ABX$ a $DCX$ jsou podobné podle věty *uu* a podle předchozího platí $|AB| = \frac{9}{4}|DC|$, proto rovněž $|AX| = \frac{9}{4}|DX|$. Dosadíme-li sem za $|AX|$ součet $|AD| + |DX|$, vyjde $|DX| = \frac{4}{5}|AD| = 2{,}4$ cm. Analogicky $|CX| = \frac{4}{5}|BC| = 3{,}6$ cm.

*Konstrukce*:
1. Trojúhelník $CDX$: $|DX| = 2{,}4$ cm, $|CX| = 3{,}6$ cm, $|\sphericalangle DXC| \in \{75°, 105°\}$,
2. bod $A$: $A$ leží na polopřímce opačné k $DX$, $|AD| = 3$ cm,
3. bod $B$: $B$ leží na polopřímce opačné k $CX$, $|BC| = 4{,}5$ cm.

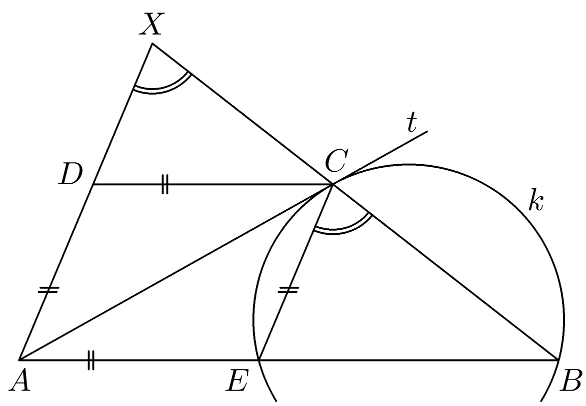
Nyní je třeba ukázat, že takto sestrojený čtyřúhelník $ABCD$ má všechny požadované vlastnosti (tj. provést *důkaz správnosti* konstrukce). Předně body 2 a 3 konstrukce zaručují, že strany $BC$ a $AD$ mají předepsané délky. Podle bodu 1 svírají přímky $BC$ a $AD$ předepsaný úhel a platí

$$|AX| = |AD| + |DX| = 5{,}4\,\mathrm{cm} \quad \text{a} \quad |BX| = |BC| + |CX| = 8{,}1\,\mathrm{cm},$$

a tak je poměr $|AX| : |BX|$ roven $2 : 3$ stejně jako poměr $|DX| : |CX|$. Trojúhelníky $ABX$ a $DCX$ jsou tudíž stejnolehlé, proto jsou úsečky $AB$ a $CD$ rovnoběžné. Tak jsme ověřili, že $ABCD$ je lichoběžník se základnami $AB$, $CD$. Z rovnosti poměrů $|AX| : |BX| = 2 : 3 = |CX| : |AX|$ plyne podobnost trojúhelníků $ABX$ a $CAX$ (se společným úhlem při vrcholu $X$), takže úhly $ABX$ a $CAX$ (neboli úhly $ABC$ a $CAD$) jsou shodné. Protože jsou shodné rovněž (střídavé) úhly $BAC$ a $ACD$, podle věty *uu* zjišťujeme, že jsou podobné trojúhelníky $ABC$ a $CAD$. Proto platí $|AB| : |CA| = |AC| : |CD|$, tudíž $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$. (Poslední rovnost lze dokázat také tak, že délky úseček $AB$, $CD$ a $AC$ vyjádříme podle kosinové věty pro trojúhelníky $ABX, CDX$ resp. $ACX$.) Všechny požadované vlastnosti sestrojeného čtyřúhelníku $ABCD$ jsou tak ověřeny.

Druhé řešení. Zadaná rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ evokuje otázku, zda nelze úlohu řešit pomocí tvrzení o mocnosti bodu ke kružnici (viz návodnou úlohu níže). Ukažme, že je tomu skutečně tak.

Předpokládejme nejprve, že $|AB| > |CD|$ a označme $X$ průsečík polopřímek $AD$ a $BC$. Vhodným bodem $E$ základny $AB$ doplňme trojúhelník $ACD$ na rovnoběžník $AECD$ (obr. 4).[4] Všimněme si, že v trojúhelníku $BCE$ známe délky stran $BC$,




Obr. 4

$EC$ ($|EC| = |AD|$) a velikost úhlu $BCE$ ($|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle CXD|$). Opišme tomuto trojúhelníku kružnici a označme ji $k$. Protože $|AE| = |CD|$, lze zadanou rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ zapsat jako $|AB| \cdot |AE| = |AC|^2$. Podle tvrzení z návodné úlohy to znamená, že přímka $AC$ je tečnou ke kružnici $k$. Tím je rozbor případu $|AB| > |CD|$

[4] To je dosti obvyklý obrat v situaci, kdy jsou dány délky ramen lichoběžníku a úhel, který tato ramena svírají.

ukončen. V případě $|AB| < |CD|$ stačí v rozboru provést dvě změny: bod $X$ je průsečíkem polopřímek $DA$ a $CB$, bod $E$ leží na polopřímce opačné k $BA$ (nikoliv na základně $AB$).

*Konstrukce*:

1. Trojúhelník $BCE$: $|BC| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $|EC| = 3\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle BCE| \in \{75°, 105°\}$,
2. kružnice $k$ opsaná trojúhelníku $BCE$,
3. tečna $t$ ke kružnici $k$ v bodě $C$,
4. bod $A$: $A \in BE \cap t$,
5. bod $D$: $AECD$ je rovnoběžník.

(Protože dle zadání platí $|BC| > |EC|$, padne bod $A$ při konstrukci podle bodu 4 na polopřímku opačnou k $EB$. Bod $E$ bude tedy náležet úsečce $AB$, takže nastane případ $|AB| > |CD|$.)

Při důkazu správnosti konstrukce opět využijeme tvrzení z návodné úlohy (v opačném „směru“, než tomu bylo v rozboru): protože je přímka $AC$ tečnou kružnice $k$, platí rovnost $|AB| \cdot |AE| = |AC|^2$. Zbytek důkazu je triviální.

Návodná úloha:

Je-li kružnice $k$ opsána trojúhelníku $KLT$ a leží-li bod $M$ na přímce $KL$ vně úsečky $KL$, pak rovnost $|MK| \cdot |ML| = |MT|^2$ platí, právě když je přímka $MT$ tečnou kružnice $k$. Dokažte. [S. Horák: *Kružnice*, ŠMM 16, MF, Praha 1966, str. 45–48.]