Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Řešte v oboru kladných čísel soustavu rovnic*

$$3x + y_{10} = 598{,}6,$$
$$x_{10} + 2y = 723{,}4,$$

v níž x_{10} a y_{10} označují po řadě čísla x a y zaokrouhlená na desítky.

Řešení. Nechť

$$x = x_{10} + m, \quad y = y_{10} + n, \quad -5 \leqq m, n \leqq 5, \tag{1}$$
$$a = 3x_{10} + y_{10}, \quad b = x_{10} + 2y_{10}. \tag{2}$$

Čísla a, b jsou násobky deseti a původní soustavu rovnic můžeme přepsat ve tvaru

$$a = 598{,}6 - 3m, \qquad b = 723{,}4 - 2n. \tag{3}$$

Čísla m, n jsou z intervalu $\langle -5, 5)$, proto $a \in \{590, 600, 610\}$ a $b \in \{720, 730\}$. Dále ze (2) dostáváme

$$x_{10} = \tfrac{1}{5}(2a - b), \qquad y_{10} = \tfrac{1}{5}(3b - a). \tag{4}$$

Vidíme, že čísla $2a - b$ a $3b - a$ musejí být dělitelná padesáti, a proto přicházejí v úvahu jen dvojice $[a, b] = [590, 730]$, $[a, b] = [610, 720]$. Nalezené hodnoty čísel a, b postupně dosadíme do (4) a (3). Pomocí (1) určíme x a y:

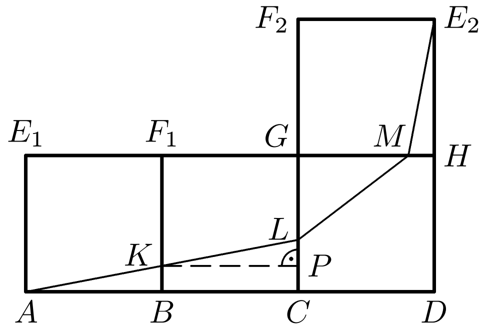
V prvním případě je $x_{10} = 90$, $y_{10} = 320$, $m = \frac{43}{15}$, $n = -3{,}3$, $x = \frac{1\,393}{15} = 92{,}8\overline{6}$ a $y = 316{,}7$, ve druhém $x_{10} = 100$, $y_{10} = 310$, $m = -3{,}8$, $n = 1{,}7$, $x = 96{,}2$ a $y = 311{,}7$.

Pomocné úlohy:

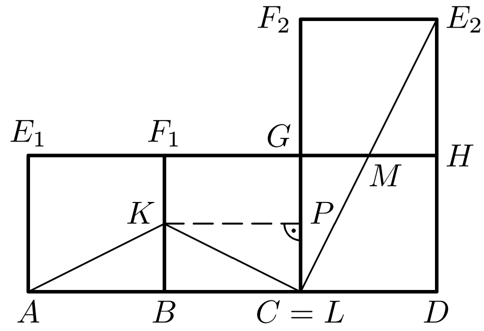
1. V oboru reálných čísel řešte rovnici $3x^3 - [x] = 3$. [40–B–I–1]
2. Dokažte, že funkce $f(x) = kx - [x]$ definovaná na množině $\mathbb{R}$ není pro $k > \frac{1}{2}$ prostá. [40–B–II–1]

2. *Na povrchu krychle $ABCDEFGH$ je sestrojena lomená čára složená ze čtyř shodných úseček ve stěnách $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ a $GHEF$, která vychází z vrcholu A a končí ve vrcholu E. Určete, v jakém poměru dělí tato lomená čára hranu CG.*

Řešení. Označme K, L, M body dané lomené čáry, jež po řadě leží na úsečkách BF, CG, GH. Délku hrany krychle položme rovnu jedné a patu kolmice z bodu K na hranu CG označme P (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky AKB, KLP a EMH se shodují v přeponách AK, KL a EM a v jednotkových odvěsnách AB, KP a EH. Jsou tedy podle věty Ssu shodné a platí $|BK| = |LP| = |MH| = u$. Z pravoúhlých trojúhelníků



Obr. 1



Obr. 2

LMG a ABK ($|GL| = 1 - 2u$, $|GM| = 1 - u$) vyjádříme pomocí Pythagorovy věty druhé mocniny délek jejich přepon a porovnáme je: $1 + u^2 = (1 - u)^2 + (1 - 2u)^2$.

Rovnice má jediný kořen menší než 1: $u = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})$. Poměr $|CL| : |LG| = 2u : (1 - 2u) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ je roven poměru zlatého řezu.

Pro polohu bodu L na hraně CG je ještě jedna možnost, znázorněná na stejné části sítě krychle na obr. 2. Zřejmě jsou pak body C a L totožné a $u = |BK| = |GM| = |MH| = \frac{1}{2}$, přičemž poměr $|CL| : |LG|$ vyjde nulový.

Doplňující úlohy:

1. Je dána krychle $ABCDEFGH$, U je střed její horní stěny $EFGH$, V je střed její přední stěny $ABFE$. Sestrojte na povrchu krychle lomenou čáru $VXYU$ složenou ze tří shodných úseček a procházející přes stěnu $BCGF$.
2. Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$, P je těžiště trojúhelníku ABC, Q střed úsečky omezené vrcholem D a těžištěm trojúhelníku ABD. Určete délku nejkratší lomené čáry spojující po povrchu čtyřstěnu body P a Q, jestliže tato čára prochází a) přes stěny ABC, ABD, b) přes stěny ABC, BCD, ABD, c) přes stěny ABC, BCD, ACD, ABD. [Obě úlohy viz Hradecký, Koman, Vyšín: *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*, ŠMM 1, MF, Praha 1963, 1977.]

3. *Do každého pole čtvercové tabulky $n \times n$ vepíšeme jedno z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byla buď všechna čísla stejná, nebo všechna různá. Příkladem pro $n = 5$ je následující tabulka*

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Označme S součet všech čísel tabulky. Kolik různých hodnot S pro dané n existuje?

Řešení. Podle způsobu obsazení řádků rozdělíme všechny zkoumané tabulky do tří skupin:

(a) V žádném řádku tabulky není n stejných čísel. Sčítáním čísel po řádcích v této situaci zjistíme, že

$$S = n(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{1}{2}n^2(n + 1). \tag{5}$$

(b) V právě jednom řádku tabulky je n stejných čísel a. V každém z ostatních řádků jsou čísla 1, 2, …, n, takže $S = na + (n-1)(1+2+\ldots+n)$ a po úpravě

$$S = na + \frac{1}{2}n(n^2-1), \quad a \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{6}$$

(c) V některém řádku tabulky je n stejných čísel b a v jiném n stejných čísel c. Pokud je $b = c$, vyskytuje se číslo c v každém sloupci aspoň dvakrát, a tedy právě n-krát. V tom případě platí

$$S = n^2 c, \qquad c \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{7}$$

Pokud jsou b, c různá čísla, jsou i v každém sloupci tabulky dvě různá čísla, a tedy jsou v něm všechna čísla navzájem různá. Sčítáním po sloupcích zjistíme, že součet S má hodnotu (5).

Dosazením daného n a postupně všech možných hodnot čísel a, c do vztahů (5), (6) a (7) dostaneme celkem $2n+1$ součtů, z toho n součtů typu (6) je navzájem různých a n součtů typu (7) je navzájem různých. Musíme tedy ještě vyšetřit, zda není možná pro nějaké hodnoty čísel a, c rovnost součtů (5) a (6), nebo (5) a (7), nebo (6) a (7).

V prvém případě z rovnice $\frac{1}{2}n^2(n+1) = na + \frac{1}{2}n(n^2-1)$ zjistíme, že rovnost nastane pro $a = \frac{1}{2}(n+1)$, to znamená, jen když n je liché.

Ve druhém případě dojdeme analogicky k závěru, že (5) a (7) se rovnají opět jen pro n liché a $c = \frac{1}{2}(n+1)$.

Ve třetím případě upravíme rovnici $na + \frac{1}{2}n(n^2-1) = n^2 c$ na tvar $2a-1 = n(2c-n)$, z něhož plyne, že pokud taková dvě čísla $a, c \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existují, je číslo n nutně liché a číslo $2a-1$ je jeho násobkem. Je však $2a-1 \leqq 2n-1$, proto může být jedině $2a-1 = n$ a $2c-n = 1$. Odtud $a = \frac{1}{2}(n+1) = c$.

Shrnutím všech tří situací můžeme konstatovat, že pro n sudé je všech $2n+1$ součtů S různých, kdežto pro n liché se mezi těmito součty vyskytují právě tři stejné.

Odpověď: Součet S všech čísel tabulky nabývá buď $2n+1$ hodnot (když n je sudé), nebo $2n-1$ hodnot (když n je liché).

Pomocná úloha:

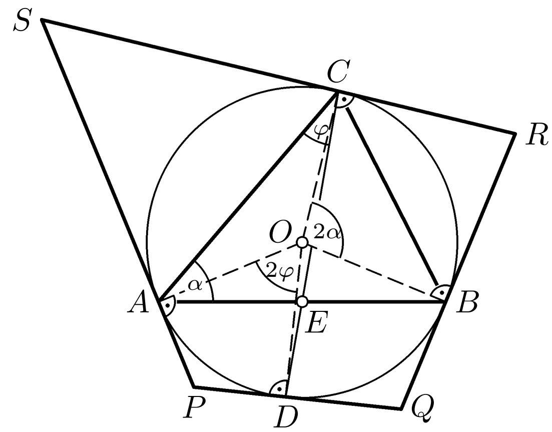
Dokažte, že pro součet S_n prvních n přirozených čísel platí:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

4. *Nechť k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC, D je průsečík těžnice na stranu AB s kružnicí k. Tečny ke kružnici k v bodech A, B, C, D vytvářejí čtyřúhelník $PQRS$. Zjistěte, pro které trojúhelníky ABC je čtyřúhelník $PQRS$ tětivový.*

Řešení. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Při označení podle obrázku 3 jsou úhly PAO a PDO pravé a velikost středového úhlu AOD je dvojnásobkem velikosti příslušného obvodového úhlu ACD. Ve čtyřúhelníku $APDO$ je tedy $|\sphericalangle APD| = 180° - 2|\sphericalangle ACD|$. Analogicky $|\sphericalangle BRC| = 180° - 2|\sphericalangle BAC|$. Čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 180°$, tj. $180° - 2|\sphericalangle ACD| + 180° - 2|\sphericalangle BAC| = 180°$. Odtud vychází pro to, aby čtyřúhelník $PQRS$ byl tětivový, nutná a postačující podmínka $|\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BAC| = 90°$. Při označení podle obr. 3 to znamená

$|\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle EAC| = 90°$, tj. těžnice CD je kolmá na AB, jak je vidět z trojúhelníku ACE. Je tedy $|AC| = |BC|$, protože trojúhelníky AEC a BEC jsou shodné podle věty *sus*.



Obr. 3

Závěr: Čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový jen tehdy, je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB.

Pomocné úlohy:

1. Dokažte, že v trojúhelníku ABC je těžnice AS kolmá na stranu BC, právě když platí $|AB| = |AC|$. [Je-li AS kolmá na BC, jsou trojúhelníky ABS a ACS shodné podle věty *sus*, a proto $|AB| = |AC|$. Platí-li naopak $|AB| = |AC|$, jsou trojúhelníky ABS a ACS shodné podle věty *sss*. Pak ale $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASC|$ a $|\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle ASC| = 180°$. Tedy $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASC| = 90°$.]
2. Dokažte, že obrazy ortocentra trojúhelníku v osových souměrnostech podle jeho stran leží na kružnici tomuto trojúhelníku opsané. [Nechť P a Q jsou po řadě paty výšek z vrcholů A a B v ostroúhlém trojúhelníku ABC, jehož ortocentrum je V. Ta tětiva kružnice opsané, která leží na stejné přímce jako úsečka AV, nechť je AD. S využitím vlastností obvodových úhlů a podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ACP a BCQ dostáváme: $|\sphericalangle VBP| = |\sphericalangle QBC| = |\sphericalangle PAC| = |DAC| = |\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle DBP|$. Trojúhelníky VBP a DBP se tedy shodují ve vnitřních úhlech při vrcholu B, v pravých úhlech při vrcholu P a ve společné odvěsně BP. Jsou tedy shodné a bod D je obrazem ortocentra V v souměrnosti podle přímky BC.
   V případě, kdy je například úhel BAC tupý, se postupuje podobně. Je však zapotřebí si uvědomit, že bod D může ležet uvnitř poloroviny ACB, nebo uvnitř poloroviny opačné, nebo mohou být body A, D totožné. Pro pravoúhlý trojúhelník ABC je důkaz zřejmý.]
3. Úhlopříčky daného tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé a protínají se v bodě E. Označme M průsečík kolmice z bodu E na stranu AB s protilehlou stranou CD. Určete poměr obsahů trojúhelníků CME a MDE. [44–B–II–4]

5. *Určete všechny polynomy $P(x)$, které pro každé reálné číslo x splňují rovnost*

$$P(2x) = 8P(x) + (x-2)^2.$$

Řešení. Stupeň polynomu P je aspoň dva. Nechť nejprve $P(x) = ax^2 + bx + c$. Dosazením tohoto vyjádření do vztahu v zadání dostáváme

$$4ax^2 + 2bx + c = (8a+1)x^2 + (8b-4)x + 8c + 4.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně dostaneme $4a = 8a + 1$, $2b = 8b - 4$ a $c = 8c + 4$. Odtud $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{7}$.

Je-li dále stupeň n polynomu P větší než dva, zjistíme analogicky, že jeho člen $a_n x^n$ s nejvyšší mocninou x splňuje vztah $2^n a_n = 8a_n$, tedy $n = 3$, přičemž $a_n \neq 0$ je libovolné. Koeficienty mnohočlenu P u mocnin x^2, x^1 a x^0 vyjdou stejně jako v předchozí situaci.

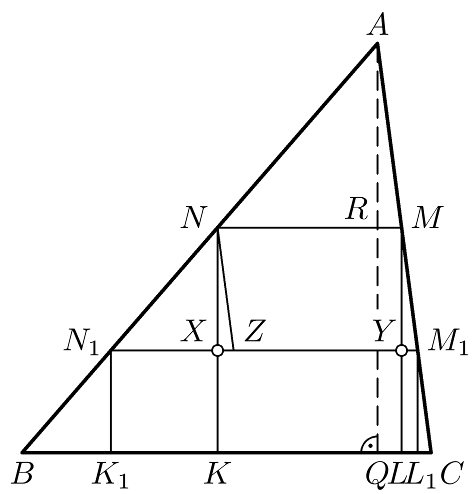
Celkový závěr: $P(x) = ax^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$, kde a je libovolné reálné číslo.

POMOCNÉ ÚLOHY:

1. Metodou neurčitých koeficientů rozložte polynom $x^4 + 1$ na součin dvou kvadratických trojčlenů.
2. Metodou neurčitých koeficientů upravte výraz $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ na tvar $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, kde a, b, c, d jsou racionální čísla. [Obě úlohy viz M. Hejný: *Teória vyučovania matematiky*, SPN, Bratislava, 1990, str. 150.]

6. *Sestrojte trojúhelník ABC s obsahem $18\,cm^2$ a následující vlastností: obvod každého pravoúhelníku $KLMN$, jehož vrcholy K, L leží na úsečce BC a body M, N po řadě na úsečkách AC, AB, je roven třem pětinám obvodu trojúhelníku ABC.*

ŘEŠENÍ. Uvažujme dva pravoúhelníky $KLMN$, $K_1L_1M_1N_1$ vepsané do trojúhelníku ABC uvedeným způsobem. Nechť $|KL| < |K_1L_1|$. Označme Z průsečík rovnoběžky s AC vedené bodem N s úsečkou N_1M_1, Q patu výšky z vrcholu A na stranu BC a X, Y průsečíky hranice pravoúhelníku $KLMN$ s úsečkou N_1M_1 (obr. 4). Obvody obou pravoúhelníků jsou si rovny, právě když $|N_1X| + |YM_1| = |NX|$. To je ekvivalentní s podmínkou $|NX| = |N_1Z|$, neboť $|XZ| = |YM_1|$. Trojúhelníky BCA, N_1ZN i NMA si jsou podobné, proto $a = v_a$. A protože $S = a \cdot \frac{1}{2}v_a = 18\,\mathrm{cm}^2$, plyne odtud rovnost $a = v_a = 6\,\mathrm{cm}$.



Obr. 4

Obvod pravoúhelníku $KLMN$ je $2|NM| + 2|KN| = 2|AR| + 2|RQ| = 2v_a = 2a = 12\,\mathrm{cm}$. Obvod $2s$ trojúhelníku ABC je proto $\frac{5}{3} \cdot 12\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{cm}$. Odtud $b + c = 2s - a = 14\,\mathrm{cm}$.

Máme tedy sestrojit trojúhelník ABC, je-li dáno a, v_a, $b + c$.

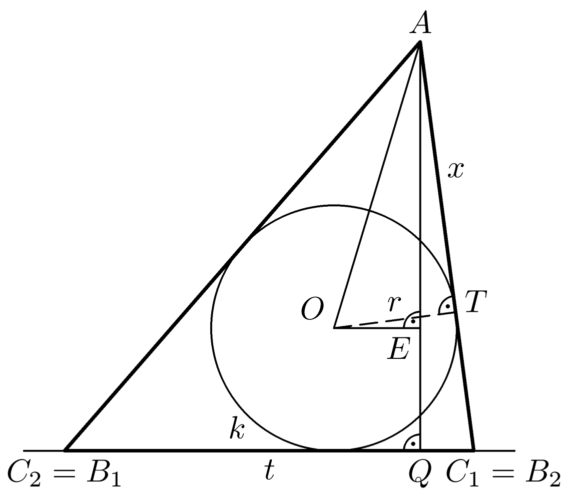
Uvedeme několik postupů řešení.

1. možnost: Snadno vypočteme $s = 10$ (cm), $s - a = 4$, $s - b = 10 - b$, $s - c = b - 4$. Po dosazení do Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku ABC dostaneme $\sqrt{40 \cdot (10 - b) \cdot (b - 4)} = 18$, což vede po úpravě na kvadratickou rovnici $10b^2 - 140b + 481 = 0$. Vyřešením obdržíme

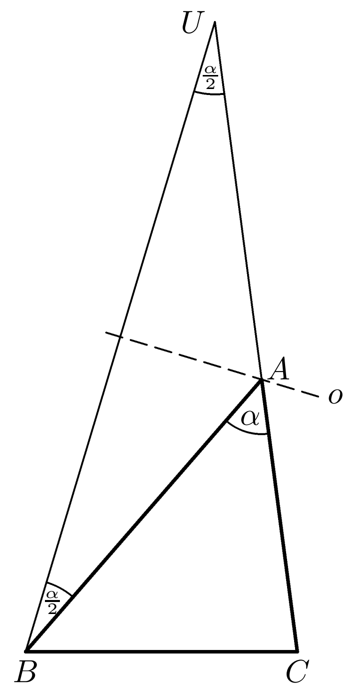
$$b = 7 + \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad c = 7 - \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \text{nebo} \quad b = 7 - \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad c = 7 + \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Obě řešení vyhovují a snadno je ze známých délek stran sestrojíme. Délku $d = 3/\sqrt{10}$ nalezneme eukleidovsky jako čtvrtou geometrickou úměrnou tak, že vztah přepíšeme na tvar $d : 1 = 3 : \sqrt{10}$. Nejdřív ovšem sestrojíme $\sqrt{10}$ např. pomocí Eukleidovy věty o výšce.

2. možnost: Nechť $k(O, r)$ je kružnice vepsaná trojúhelníku ABC a T její bod dotyku se stranou AC (obr. 5). Pravoúhlý trojúhelník AOT můžeme sestrojit, neboť známe délky jeho odvěsen $|AT| = x = s - a = 4\,\text{cm}$, $|TO| = r = S/s = 1{,}8\,\text{cm}$, dále kružnici $k(O, r)$ a nad přeponou AO ještě jeden pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou AE délky $v_a - r = 4{,}2\,\text{cm}$. (Tento trojúhelník zřejmě existuje — výpočtem délky přepony trojúhelníku AOT pomocí Pythagorovy věty lze ověřit, že $|AO| > v_a - r$.) Úsečku AE doplníme podle obrázku na úsečku AQ délky v_a. Kolmice na AQ v bodě Q je přímka t. Její průsečíky s tečnami z bodu A ke kružnici k jsou hledané vrcholy B, C. Úloha má dvě řešení. Vzhledem k jednoznačně sestrojenému trojúhelníku AOT nalezneme sice konstrukcí pomocí Thaletovy věty dva trojúhelníky AOE a AOE_1, každý z výsledných trojúhelníků AB_kC_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ se však v souhlasně označených prvcích shoduje s některým z překrývajících se trojúhelníků AB_1C_1, AB_2C_2 na obr. 5.



Obr. 5



Obr. 6

3. možnost: Úsečka CU na obr. 6 má délku $b + c$. Trojúhelník UBA je tedy rovnoramenný se základnou UB, a proto $|\sphericalangle BUC| = \frac{1}{2}\alpha$. Tento úhel umíme sestrojit podle předchozího postupu, neboť je to úhel OAT na obr. 5. Sestrojíme tedy nejprve trojúhelník CUB, ve kterém známe $|BC|$, $|CU|$ a $|\sphericalangle CUB|$. Bod A je pak průsečík úsečky CU s osou strany BU. Konstrukce vede opět na dvě řešení.

Pomocná úloha:

V trojúhelníku ABC známe výšku v z vrcholu A a délku strany BC. Určete obvod obdélníku $KLMN$, leží-li jeho strana KL na úsečce BC, vrcholy M, N na stranách AC, AB a platí

$$|KL| : |LM| = 3 : 2.$$

[$10av/(2a + 3v)$.]