Úlohy domácího kola kategorie C

1. *Najděte všechna trojmístná čísla n taková, že poslední trojčíslí čísla n^2 je shodné s číslem n.*

Student může při řešení úlohy postupovat například tak, že bude hledat nejdříve ta čísla n, pro která je poslední číslice čísla n^2 totožná s poslední číslicí čísla n. V tom případě se musí poslední číslice čísla n rovnat některé z číslic 0, 1, 5 nebo 6.

Vezměme například 6 a označme b, a předcházející číslice čísla n, tedy $n = 100b + 10a + 6$, $n^2 = 10\,000b^2 + 2\,000ab + 1\,200b + 100a^2 + 120a + 36$. Tato dvě čísla se shodují v posledním dvojčíslí právě tehdy, jestliže se $20a + 36$ rovná $10a + 6$ až na celý násobek čísla 100, tedy $10a + 30$ má být násobek 100, což platí pouze pro $a = 7$. Je tedy $n = 100b + 76$, $n^2 = 10\,000b^2 + 15\,200b + 5\,776$. Tato dvě čísla se shodují v posledních třech číslicích, právě když se $200b + 776$ rovná $100b + 76$ až na násobek čísla 1 000, to znamená, že $b + 7$ má být celý násobek čísla 10, proto $b = 3$. Jedním řešením je číslo $n = 376$. Podobně bychom dostali další řešení $n = 625$, zatímco předpoklad, že poslední číslice je 0 nebo 1, nevede k cíli.

Výhodnější je ale postup založený na dělitelnosti — dvě čísla se shodují v posledních třech číslicích, právě když je jejich rozdíl dělitelný číslem 1 000. V našem případě má být číslo $n^2 - n = n(n-1)$ dělitelné číslem $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$. Čísla n a $n-1$ jsou nesoudělná a menší než 1 000, proto musí být jedno dělitelné číslem 125 a druhé osmi.

První možnost je tedy: n je *lichým* násobkem 125, takže se rovná některému z čísel 125, 375, 625, 875, a současně je $n - 1$ násobek osmi, proto $n = 625$.

Druhá možnost: n je násobek 8 (tedy sudé) a $n-1$ lichý násobek 125, proto $n = 376$, neboť z čísel 126, 376, 626, 876 je pouze číslo 376 násobek osmi.

Při tomto postupu hraje významnou roli nesoudělnost dvou čísel. Studenti by si měli připomenout pojem největšího společného dělitele čísel a, b a ověřit, že ten dělí také každé číslo tvaru $ka + lb$, kde k, l jsou celá. Existují-li tedy celá k, l tak, že $ka + lb = 1$, jsou čísla a, b nesoudělná. Je-li d největší společný dělitel čísel a, b, je $a = dp$, $b = dq$, kde p, q jsou nesoudělná a číslo $n = dpq$ je nejmenším společným násobkem čísel a, b.

Pomocné úlohy:

1. Najděte všechna přirozená čísla n menší než 100, pro která je číslo $7n + 4$ druhou mocninou přirozeného čísla. (45–C–S–1)
[Má platit $7n + 4 = m^2$, kde m je přirozené. Číslo m napíšeme ve tvaru $7k + r$, kde k je neúplný podíl a r zbytek při dělení m číslem 7, takže $7n + 4 = 49k^2 + 14kr + r^2$, proto r^2 musí dát při dělení sedmi zbytek 4, tedy $r = 2$ nebo $r = 5$. V prvním případě je $n = k(7k + 4)$, v druhém případě je $n = 7k^2 + 10k + 3$, řešením úlohy jsou čísla 11, 20, 36, 51, 75 a 96. *Jiný postup*: $7n = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$. Proto je jedno z čísel $m - 2$, $m + 2$ dělitelné sedmi, buď je $m = 7k + 2$, nebo $7k - 2$, $n = k(7k + 4)$ nebo $n = k(7k - 4)$.]
2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $n^6 - n^2$ dělitelné číslem 20. (40–C–II–1)
[$n^6 - n^2 = n^2(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1)$. Je-li n sudé, je n^2 dělitelné 4, jinak jsou $n - 1$, $n + 1$ sudá a součin $(n - 1)(n + 1)$ je dělitelný čtyřmi. Není-li žádné z čísel $n - 1$, n,

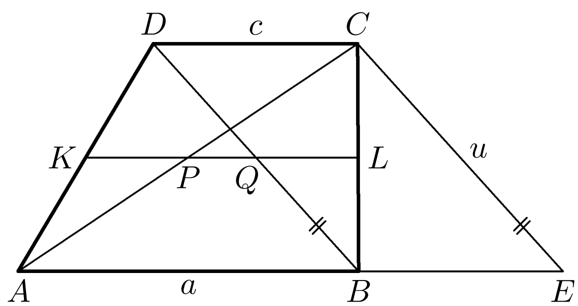
$n+1$ dělitelné pěti, je $n = 5k+2$ nebo $n = 5k+3$ a n^2+1 je dělitelné pěti. Když je číslo dělitelné 4 a 5, je dělitelné 20.]

3. Které čtyřciferné číslo má na prvních dvou místech stejné číslice, na druhých dvou místech stejné číslice, a je druhou mocninou přirozeného čísla? (1–B–II–2)
   [Hledáme číslo ve tvaru $aabb$, tj. $1\,000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b)$, které je druhou mocninou. Protože je dělitelné 11, musí být dělitelné číslem 121, takže $100a + b = 99a + a + b$ je dělitelné 11, odkud $a + b = 11$. Hledané číslo má tvar $11(99a + 11) = 11 \cdot 11(9a + 1)$. Pouze pro $a = 7$ je $9a + 1$ druhou mocninou, jediným řešením je číslo $7\,744 = 88^2$.]

Literatura: J. Sedláček: *Co víme o přirozených číslech*, 2. svazek Školy mladých matematiků (ŠMM), MF Praha 1977,
F. Veselý: *O dělitelnosti čísel celých*, 14. sv. ŠMM, MF Praha 1966.

2. *Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány délky 9 cm a 12 cm jeho úhlopříček, délka 8 cm střední příčky a vzdálenost 2 cm středů úhlopříček.*

ŘEŠENÍ. Zvolme označení podle obr. 1, KP je střední příčka v trojúhelníku ACD,



Obr. 1

proto $|KP| = \frac{1}{2}|DC|$, obdobně $|QL| = \frac{1}{2}|DC|$, $|PL| = \frac{1}{2}|AB|$, takže $|PQ| = \frac{1}{2}(a - c) = 2\,\text{cm}$. Protože $|KL| = \frac{1}{2}(a + c) = 8\,\text{cm}$, je $a = 10\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$. Nejdříve sestrojíme trojúhelník AEC podle věty *sss*, na úsečce AE pak bod B, jím vedeme rovnoběžku s CE. Ta protne přímku vedenou bodem C rovnoběžně s AE v bodě D.

Řešitelé by si měli připomenout pojem střední příčky lichoběžníku, jejíž délka se rovná aritmetickému průměru délek základen.

POMOCNÉ ÚLOHY:

1. Sestrojte lichoběžník, jehož úhlopříčky jsou navzájem kolmé, mají délky 6 cm a 8 cm, jestliže se délka kratší základny rovná 2 cm.
   [Postup řešení je obdobný, nejdříve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ACE s danými odvěsnami.]
2. Střední příčka dělí lichoběžník na dva lichoběžníky, poměr jejich obsahů je q. Určete poměr délek základen lichoběžníku. Pro která q má úloha řešení? (41–C–S–3)
   [Označíme-li a, c délky základen, je $q = (3a + c) : (a + 3c)$, neboť oba menší lichoběžníky mají poloviční výšku než původní a délka střední příčky, která je základnou vzniklých lichoběžníků, je $\frac{1}{2}(a + c)$. Je pak $a : c = (3q - 1) : (3 - q)$. Toto číslo je kladné, q je menší než 3 a větší než $\frac{1}{3}$, ale různé od 1 (a je různé od c).]
3. Určete obsah lichoběžníku, jestliže jsou dány délky a, c obou jeho základen, délka u jedné úhlopříčky a úhlopříčky jsou navzájem kolmé. (36–C–II–1)
   [Označení opět jako na obr., trojúhelníky CDA, CDB a BEC mají stejný obsah, proto

se obsah lichoběžníku rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníku ACE. Přepona je $a+c$, jedna odvěsna je u, obsah je $\frac{1}{2}u\sqrt{(a+c)^2-u^2}$.]

3. *Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro které platí*

$$n(a,b)+D(a,b)=63,$$

kde $n(a,b)$ značí nejmenší společný násobek a $D(a,b)$ největší společný dělitel čísel a, b.

Řešení. Využijeme to, co jsme uvedli v 1. úloze. Je $a=Dp$, $b=Dq$, $n=Dpq$, kde D je největší společný dělitel, n nejmenší společný násobek čísel a, b, čísla p, q jsou nesoudělná. Podle textu úlohy má platit $D(1+pq)=63$, takže máme tyto možnosti (bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $a \leqq b$):

D	pq	(p,q)		(a,b)	
1	62	$(1,62)$,	$(2,31)$	$(1,62)$,	$(2,31)$
3	20	$(1,20)$,	$(4,5)$	$(3,60)$,	$(12,15)$
7	8	$(1,8)$		$(7,56)$	
9	6	$(1,6)$,	$(2,3)$	$(9,54)$,	$(18,27)$
21	2	$(1,2)$		$(21,42)$	

Úloha má 8 řešení, nerozlišujeme-li pořadí čísel a, b.

Pomocné úlohy:

1. Najděte nejmenší přirozené číslo, jehož polovina druhé mocniny je druhou mocninou přirozeného čísla a jehož třetina třetí mocniny je třetí mocninou přirozeného čísla. (35–C–II–1)
[Hledané číslo n je tvaru $n=2^k\cdot 3^l\cdot c$, kde c je přirozené číslo, které není dělitelné ani dvěma, ani třemi. Pak $\frac{1}{2}n=2^{k-1}\cdot 3^l\cdot c$ má být druhou mocninou, proto musí být k liché a l sudé. Číslo $\frac{1}{3}n=2^k\cdot 3^{l-1}\cdot c$ je třetí mocninou, tzn. že čísla k, $l-1$ jsou dělitelná třemi. Nejmenší n dostaneme, položíme-li $c=1$, $k=3$, $l=4$. Je tedy $n=648$, $\frac{1}{2}n=324=18^2$, $\frac{1}{3}n=216=6^3$.]
2. Dokažte, že pro největší společný dělitel D a nejmenší společný násobek n čísel a, b platí $ab=Dn$. Pozor — pro tři čísla toto neplatí, viz čísla 1, 2, 4, $D=1$, $n=4$, $1\cdot 2\cdot 4=8$.

Literatura: stejná jako při úloze C–I–1.

4. *Dokažte, že pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku platí*

$$\frac{(a^2+b^2)c^2-(a^2-b^2)^2}{abc^2} \leqq 2.$$

Pro které trojúhelníky nastane v předchozím vztahu rovnost?

Řešení. Uvedenou nerovnost upravíme na ekvivalentní tvar

$$0 \leqq (a^2-b^2)^2-(a^2-2ab+b^2)c^2,$$

tj.

$$0 \leqq (a-b)^2\cdot[(a+b)^2-c^2].$$

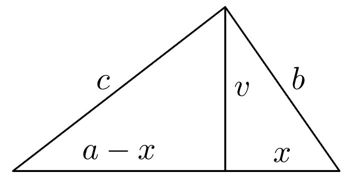
Protože $a+b>c$, platí tato nerovnost pro délky libovolného trojúhelníku, rovnost nastane, právě když $a=b$, tedy pro rovnoramenné trojúhelníky se základnou c.

Pomocné úlohy:

1. Odvoďte Heronův vzorec: Pro obsah S trojúhelníku s délkami stran a, b, c platí

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

[Můžeme předpokládat, že při straně a jsou oba úhly ostré, pata výšky v rozdělí stranu a na úsečky délek $a-x$, x (obr.). Je tedy $2S = av$, $x^2+v^2 = b^2$, $(a-x)^2+v^2 = c^2$. Z posledních dvou rovnic vyloučíme x a vyjádříme v. Dostaneme $16S^2 = 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$ a použijeme vícekrát vzorec pro rozdíl druhých mocnin.]



2. Dokažte, že pro délky a, b, c stran trojúhelníku platí

$$a^2+b^2+c^2 < 2ab+2bc+2ca.$$

3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí

$$2ab+2bc+2ca \leqq 2(a^2+b^2+c^2).$$

[Nerovnost v úloze 2 je ekvivalentní s nerovností $0 < (a+b-c)c+(b+c-a)a+(c+a-b)b$, nerovnost v úloze 1 s nerovností $0 \leqq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.]

Literatura: S. Horák: *Nerovnosti v trojúhelníku*, 57. svazek ŠMM, MF Praha 1986.

5. *Třicet maturantů jednoho gymnázia si podalo přihlášku k dalšímu studiu na některou ze šesti fakult Českého vysokého učení technického. Využili možnost podat více přihlášek, a tak polovina žáků podala přihlášku aspoň na tři fakulty, třetina si podala přihlášku na více než tři fakulty. Na fakultu architektury se s ohledem na talentovou přijímací zkoušku nehlásil nikdo. Dokažte, že na některou ze zbývajících pěti fakult se přihlásilo méně než dvacet studentů.*

Řešení. Nejdříve odhadneme, kolik přihlášek celkem maturanti podali. Polovina, tj. 15 studentů, podala jednu nebo dvě přihlášky. Z druhé poloviny podalo 10 studentů aspoň 4, tedy 4 nebo 5 přihlášek, a zbývajících pět studentů podalo přihlášku právě na tři fakulty. Celkem podali nejvýše $15 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 5 = 95$ přihlášek. Proto nemohli podat na každou fakultu aspoň 20 přihlášek, to by jich muselo být aspoň 100.

Studentům doporučte, aby si udělali rozpis pro případ, kdy na každou z pěti fakult bylo podáno právě 19 přihlášek (A znamená, že žák v příslušném sloupci podal přihlášku na fakultu uvedenou v řádku, znak – znamená, že přihlášku nepodal. Studenti jsou rozděleni do tří skupin, první je složena z 15 studentů, kteří podali dvě přihlášky. Následuje skupina pěti studentů s třemi přihláškami, třetí skupina má 10 členů, každý podal 5 přihlášek):

student	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1. fakulta:	A	A	A	A	A	A	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2. fakulta:	–	–	–	A	A	A	A	A	A	–	–	–	–	–	–
3. fakulta:	–	–	–	–	–	–	A	A	A	A	A	A	–	–	–
4. fakulta:	–	–	–	–	–	–	–	–	–	A	A	A	A	A	A
5. fakulta:	A	A	A	–	–	–	–	–	–	–	–	–	A	A	A

student	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1. fakulta	A	A	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2. fakulta	–	A	A	A	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
3. fakulta	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
4. fakulta	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
5. fakulta	A	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Pomocná úloha:
Dokažte, že za stejných předpokladů jako v soutěžní úloze si podalo aspoň na jednu fakultu přihlášku aspoň 14 studentů.
[Celkem podali aspoň $15 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 70$ přihlášek na pět fakult. Kdyby neplatilo tvrzení této úlohy, mohlo by být přihlášek nejvýše $5 \cdot 13 = 65$. Rozpis pro případ, kdy si na každou z pěti fakult podalo přihlášku právě 14 studentů:

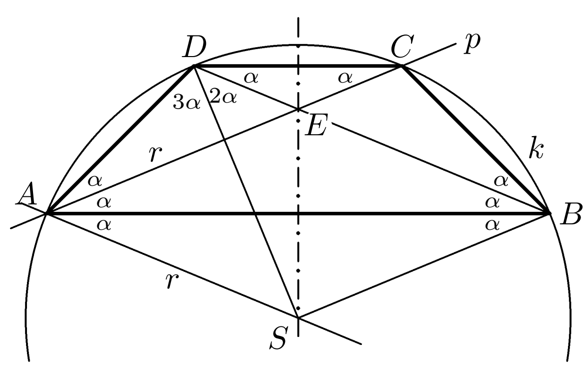
student	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1. fakulta	A	A	A	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2. fakulta	–	–	–	A	A	A	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3. fakulta	–	–	–	–	–	–	A	A	A	–	–	–	–	–	–
4. fakulta	–	–	–	–	–	–	–	–	–	A	A	A	–	–	–
5. fakulta	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	A	A	A

student	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1. fakulta	A	A	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	–	–
2. fakulta	–	A	A	A	–	A	A	A	A	A	A	–	–	A	A
3. fakulta	–	–	A	A	A	A	A	A	A	–	–	A	A	A	A
4. fakulta	A	–	–	A	A	A	A	–	–	A	A	A	A	A	A
5. fakulta	A	A	–	–	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A

]

6. *Do dané kružnice s poloměrem r vepište lichoběžník $ABCD$ s kratší základnou CD a průsečíkem úhlopříček E tak, aby platilo $|BC| = |CD|$ a $|AE| = r$.*

Řešení. Předpokládejme, že jsme již lichoběžník sestrojili (obr. 2), přímka SE je

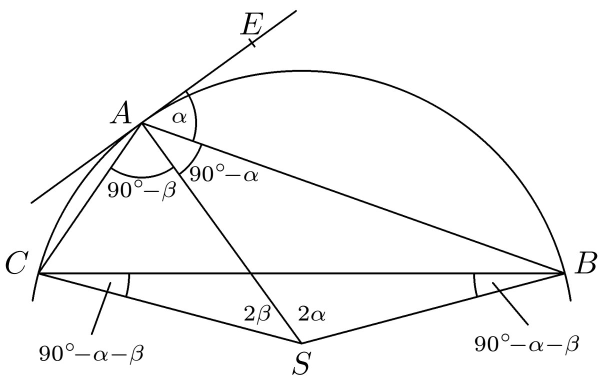


Obr. 2

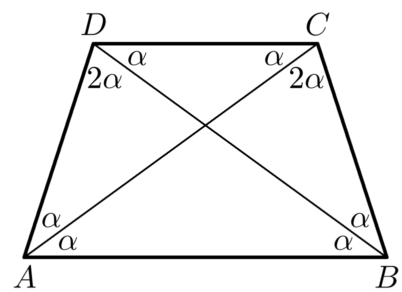
nutně jeho osou souměrnosti. Označíme-li α velikost úhlu ACD, mají stejnou velikost i úhly BDC, ABD a CAB, jak plyne ze souměrnosti lichoběžníku podle přímky SE a z rovnoběžnosti přímek CD a AB. Protože $|BC| = |CD|$, je trojúhelník BCD rovnoramenný, a proto se α rovnají i velikosti úhlů CBD a CAD. A protože $|AE| = |AS|$ a AB je kolmá na SE, rovnají se α také velikosti úhlů SAB a SBA. Z rovnoramenného trojúhelníku ASD plyne, že úhly SAD a SDA mají velikost 3α, velikost úhlu SDB je 2α (trojúhelník SDB je také rovnoramenný). Z trojúhelníku ACD pak plyne, že $8\alpha = 180°$, $\alpha = 22{,}5°$. Tím už je dána *konstrukce*: zvolíme na dané kružnici libovolně bod A, jím vedeme přímku p svírající s přímkou AS úhel $2\alpha = 45°$, p protne kružnici k v bodě C různém od A. Na úsečce AC zvolíme bod E, $|AE| = r$. Body B, D sestrojíme jako body souměrně sdružené k bodům A, C podle přímky SE. Jiná volba bodu A by vedla pouze k řešení, které by vzniklo otočením řešení již sestrojeného. Podobně volba druhé přímky vedené bodem A pod úhlem $45°$ s přímkou AS vede k řešení souměrně sdruženému k sestrojenému podle přímky AS.

Pomocné úlohy:

1. Pomocí úhlů v rovnoramenných trojúhelnících dokažte větu o obvodovém a středovém úhlu (obr. a). Proveďte důkaz také v případě, kdy je bod S bodem trojúhelníku ABC.
2. Dokažte také, že polovině středového úhlu se rovná i úhel EAB, kde AE je tečna kružnice k (obr. a), tzv. úhel úsekový.



a



b

3. Čtyřúhelník má tři strany stejně dlouhé, délka čtvrté strany se rovná délce jedné i druhé úhlopříčky čtyřúhelníku. Určete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku. Jaký je to čtyřúhelník? (40–C–S–1)
   [Zvolme označení vrcholů tak, že $|BC| = |CD| = |DA|$ (strany) a $|AB| = |AC| = |BD|$ (obr. b). Ze shodnosti trojúhelníků ABC, BAD (podle věty *sss*) plyne, že čtyřúhelník je rovnoramenný lichoběžník osově souměrný podle osy úsečky AB. Označíme-li α velikost úhlu ACD, velikost úhlu CBA je 2α a $\alpha = 36°$. Velikosti vnitřních úhlů jsou $72°$ a $108°$.]

   Literatura: S. Horák: *Kružnice*, 16. svazek ŠMM, MF Praha 1966.