50. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie A

1. Najděte všechna reálná čísla p, pro která má soustava nerovnic

$$\begin{aligned} 25 + 2x^2 &\leqq 13y + 10z - p, \\ 25 + 3y^2 &\leqq 6z + 10x, \\ 25 + 4z^2 &\leqq 6x + 5y + p \end{aligned}$$

s neznámými x, y, z řešení v oboru reálných čísel.

2. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnou AB délky a, v němž oba úhly ABC, ADB jsou pravé. Na straně AB leží bod M tak, že úsečka MD je kolmá na AC a úsečka MC je kolmá na BD. Určete délky ostatních stran lichoběžníku.

3. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$, která jsou dělitelná každým z dvojmístných čísel $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, jejichž číslice a, b, c, d jsou liché a ne všechny stejné.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie A se koná

v úterý 5. prosince 2000

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Sečtením všech tří nerovnic dostaneme nerovnost

$$75 + 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 \leqq 16x + 18y + 16z,$$

z níž po „doplnění na druhé mocniny“ vychází

$$2(x-4)^2 + 3(y-3)^2 + 4(z-2)^2 \leqq 0.$$

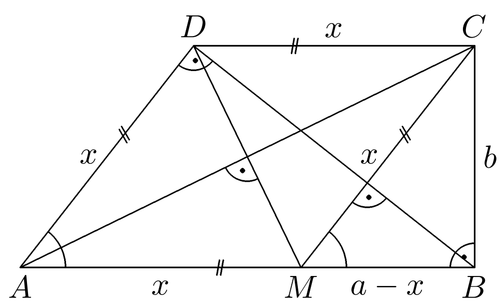
Tato nerovnost, jež je důsledkem dané soustavy nerovnic, zřejmě platí jedině tehdy, když jsou základy všech tří dvojmocí na levé straně nerovnosti rovny nule, tedy když $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$. Daná soustava má proto (při zvoleném p) nejvýše jedno řešení, a to právě vypsanou trojici čísel. Zjistíme nyní, pro kterou hodnotu parametru p se skutečně jedná o řešení. Po dosazení hodnot $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$ do dané soustavy dostaneme trojici nerovností

$$57 \leqq 59 - p, \quad 52 \leqq 52, \quad 41 \leqq 39 + p.$$

Z první nerovnosti vychází podmínka $p \leqq 2$, ze třetí podmínka $p \geqq 2$. Číslo $p = 2$ je tedy jediná hodnota p, pro kterou má daná soustava v oboru reálných čísel řešení.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 4 body za určení neznámých x, y, z a 2 body za určení hodnoty p.

2. Úsečky MC a AD jsou rovnoběžné (obě jsou totiž kolmé k úsečce BD, obr. 1); protože jsou rovnoběžné i úsečky AM a DC, je čtyřúhelník $AMCD$ rovnoběžník. Je to



Obr. 1

dokonce kosočtverec, neboť jeho úhlopříčky jsou dle zadání navzájem kolmé. Označme proto $x = |CD| = |DA| = |AM| = |MC|$, zřejmě $a > x$. Pak $|MB| = a - x$ a ze shodnosti souhlasných úhlů DAM a CMB plyne podobnost pravoúhlých trojúhelníků ABD a MCB, takže platí úměra $|AD| : |AB| = |MB| : |MC|$, neboli $x : a = (a-x) : x$. Odtud pro neznámou délku x vychází kvadratická rovnice $x^2 + ax - a^2 = 0$, která má jediné kladné řešení $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,a$. Tak jsme vypočetli (shodné) délky základny CD a ramena AD daného lichoběžníku; zbývá určit délku ramena BC. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník CMB dostáváme

$$|BC| = \sqrt{|MC|^2 - |MB|^2} = \sqrt{x^2 - (a-x)^2} = \sqrt{a(2x-a)} = a\sqrt{\sqrt{5}-2},$$

neboť $2x - a = a\bigl(\sqrt{5}-2\bigr)$.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 3 body za odvození rovnosti $|AD| = |AM|$.

3. Z vyjádření $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$ plyne, že podmínky dělitelnosti čísly $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ jsou splněny, právě když $\overline{cd} \mid 100 \cdot \overline{ab}$ a $\overline{ab} \mid \overline{cd}$, tedy právě když $\overline{cd} = k \cdot \overline{ab}$, kde přirozené číslo k je některý dělitel čísla 100. Protože obě čísla $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ jsou dle zadání lichá a dvojciferná, plyne odtud, že buď $k = 1$, nebo $k = 5$. Rozlišíme oba případy, přitom s ohledem na vyjádření $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{bc} + (1000a + d)$ budeme místo podmínky $\overline{bc} \mid \overline{abcd}$ zkoumat ekvivalentní podmínku

$$\overline{bc} \mid (1000a + d). \tag{P}$$

(Tato úprava není nutná, jen poněkud zjednodušuje další zápisy.)

a) Je-li $\overline{cd} = \overline{ab}$, platí $c = a$ a $d = b$, takže podmínka (P) se zapíše ve tvaru $(10b + a) \mid (1000a + b)$. Protože

$$1000 \cdot (10b + a) - (1000a + b) = 9999 \cdot b = 11 \cdot 9 \cdot 101 \cdot b$$

a 101 je prvočíslo (tudíž je s číslem $10b + a$ nesoudělné), dostáváme ekvivalentní podmínku $(10b + a) \mid (11 \cdot 9b)$. Odtud s ohledem na zřejmou nerovnost $10b + a > 9b$ plyne, že číslo $10b + a$ má číslo 11 ve svém rozkladu na prvočinitele. Podmínka $11 \mid (10b + a)$ je však splněna, jen když se číslice a a b rovnají, pak by však z rovnosti $\overline{cd} = \overline{ab}$ vyplývalo, že číslo $\overline{abcd}$ má *všechny* číslice stejné. O takových číslech podle zadání úlohy neuvažujeme.

b) Z rovnosti $\overline{cd} = 5 \cdot \overline{ab}$ ihned určíme (liché) cifry $a = 1$ a $d = 5$, po jejich dosazení po úpravě vyjde rovnost $b = 2c - 9$, takže jsou tři možnosti:

$$c = 5 \text{ a } b = 1, \quad c = 7 \text{ a } b = 5, \quad c = 9 \text{ a } b = 9.$$

Podmínka (P) má nyní tvar $\overline{bc} \mid 1\,005$, z čísel 15, 57 a 99 je však pouze číslo 15 dělitelem čísla $1\,005$ ($1\,005 = 3 \cdot 5 \cdot 67$), proto nutně $b = 1$ a $c = 5$.

Odpověď: Hledané číslo je jediné, a to $1\,155$.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 3 body za zdůvodnění, že platí buď $\overline{cd} = \overline{ab}$, nebo $\overline{cd} = 5 \cdot \overline{ab}$, k tomu 2 body za rozbor první možnosti, 1 bod za rozbor možnosti druhé.