50. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie B

1. Najděte všechna trojmístná čísla n, jejichž druhá mocnina končí stejným trojčíslím jako druhá mocnina čísla $3n - 2$.

2. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme E průsečík přímek BC a AD. Leží-li průsečík úhlopříček AC a BD na ose úhlu AEB, je trojúhelník ABE rovnoramenný. Dokažte.

3. Určete mnohočleny P a Q takové, že pro všechna reálná čísla x platí

$$Q(x^2) = (x+1)^4 - x\big(P(x)\big)^2.$$

Školní – klauzurní část I. kola kategorie B se koná

v úterý 23. ledna 2001

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Jestliže číslo n vyhovuje podmínce úlohy, existuje přirozené číslo k takové, že

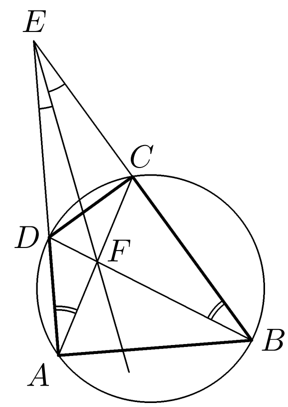
$$(3n-2)^2 - n^2 = 1\,000k.$$

Levou stranu uvedené rovnosti rozložíme na součin podle vzorce pro rozdíl čtverců a po snadné úpravě dostaneme

$$(2n-1)(n-1) = 250k = 2 \cdot 5^3 \cdot k.$$

Čísla $2n-1$ a $n-1$ jsou nesoudělná (je $2n-1 = 2(n-1)+1$), přitom první z nich je liché, takže druhé musí být sudé. Hledáme tedy *lichá* trojmístná čísla n taková, že buď $n-1$ je násobkem 250, nebo $2n-1$ je lichým násobkem čísla 125. V prvním případě dostaneme $n \in \{251, 501, 751\}$ a ve druhém vidíme, že musí být $2n-1 \in$ $\in \{375, 625, 875, 1\,125, 1\,375, 1\,625, 1\,875\}$, tedy (protože n je liché) $n \in \{313, 563, 813\}$. Celkem má úloha uvedených šest řešení.

2. Označme F průsečík úhlopříček AC a BD (obr. 1). Jestliže je přímka EF osou úhlu AEB, jsou úhly AEF a BEF shodné. Navíc jsou shodné i úhly EAF a EBF, neboť jsou to obvodové úhly příslušné téže tětivě CD. Trojúhelníky AFE a BFE se shodují ve společné straně EF, jsou tedy shodné podle věty *usu*, $|AE| = |BE|$ a trojúhelník ABE je tudíž rovnoramenný.



Obr. 1

3. Předpokládejme, že P je mnohočlen stupně n. Členy polynomu $Q(x^2)$ obsahují jen sudé mocniny x a polynom $x \cdot P^2(x)$ je lichého stupně $2n+1$. Protože má platit $Q(x^2) = (x+1)^4 - x \cdot P^2(x)$, vidíme, že nemůže být $2n+1 > 4$. Je tedy $n \leqq 1$ a

$$P(x) = ax + b, \quad Q(x^2) = (x+1)^4 - x(ax+b)^2. \tag{1}$$

Po úpravě dostaneme $Q(x^2) = x^4 + (4-a^2)x^3 + (6-2ab)x^2 + (4-b^2)x + 1$. Koeficienty při lichých mocninách x jsou rovny nule, proto $a, b \in \{-2, 2\}$ a $Q(x^2) = x^4 + (6-2ab)x^2 + 1$. Dosazením každé ze čtyř možných dvojic čísel a, b do (1) nalezneme všechna čtyři řešení úlohy:

$P(x) = 2x + 2$ a $Q(x) = x^2 - 2x + 1$,
$P(x) = 2x - 2$ a $Q(x) = x^2 + 14x + 1$,
$P(x) = -2x + 2$ a $Q(x) = x^2 + 14x + 1$,
$P(x) = -2x - 2$ a $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.