50. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie C

1. Najděte všechny trojice a, b, c přirozených čísel, pro které současně platí

$$n(ab, c) = 2^8, \qquad n(bc, a) = 2^9, \qquad n(ca, b) = 2^{11},$$

kde $n(x, y)$ značí nejmenší společný násobek přirozených čísel x a y.

2. V rovině je dán čtverec $ABCD$. Kružnice k prochází body A, B a dotýká se přímky CD. Označme M ($M \neq B$) průsečík kružnice k a strany BC. Určete poměr $|CM| : |BM|$.

3. Pro která dvojmístná čísla n je číslo $n^3 - n$ dělitelné stem?

Školní – klauzurní část I. kola kategorie C se koná

v úterý 23. ledna 2001

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

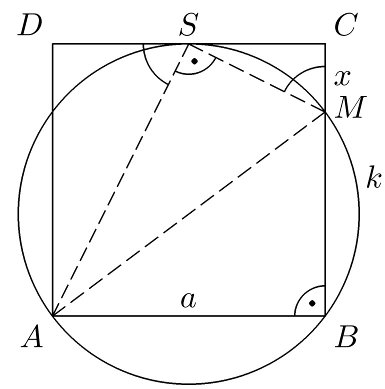
1. Jsou-li čísla a, b, c řešením úlohy, jsou to dělitelé mocnin dvou, a tedy sama mocniny čísla 2, $a = 2^r$, $b = 2^s$, $c = 2^t$, kde r, s, t jsou celá nezáporná čísla. Z rovnosti $n(ab, c) = 2^8$ plyne, že čísla t, $r+s$ se rovnají nejvýše 8, přičemž aspoň jedno z nich se rovná 8. Podobně se čísla $s+t$, r rovnají nejvýše devíti a aspoň jedno z nich je rovno devíti. Dále se jedno z čísel $r+t$, s rovná 11 a žádné z nich není větší než 11. Nemůže však platit $s = 11$, protože $s + t \leqq 9$, takže $r + t = 11$. Nemůže být $r = 9$, neboť má platit $r + s \leqq 8$. Proto $s + t = 9$. Dále máme dvě možnosti:

1) $t = 8$, odkud $r = 3$, $s = 1$, $a = 2^3$, $b = 2$, $c = 2^8$,

2) $r + s = 8$, odkud plyne $t = 6$, $r = 5$, $s = 3$, tedy $a = 2^5$, $b = 2^3$, $c = 2^6$.

Úloha má dvě řešení.

2. Protože střed kružnice k leží na ose strany AB, která je zároveň osou i protější strany CD, dotýká se kružnice k úsečky CD v jejím středu S (obr. 1). Protože úhel ABM je pravý, je AM průměrem kružnice k, a proto je pravý i úhel ASM. Odtud plyne, že $|\sphericalangle DSA| = 90° - |\sphericalangle CSM| = |\sphericalangle SMC|$, proto jsou trojúhelníky SMC a ASD podobné, takže $|CM| : |CS| = |DS| : |DA|$. Označíme-li $a = |DA|$ a $x = |CM|$, je $x : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : a$, tedy $x = \frac{1}{4}a$. Proto $|CM| : |BM| = 1 : 3$.



Obr. 1

Dodejme, že rovnost $x = \frac{1}{4}a$ lze odvodit i z Pythagorovy věty pro trojúhelníky AMB, AMS:

$$|AB|^2 + |BM|^2 = |AM|^2 = |AS|^2 + |SM|^2,$$

takže

$$a^2 + (a-x)^2 = \left(a^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2\right) + \left((\tfrac{1}{2}a)^2 + x^2\right),$$

odkud po úpravě

$$x = \tfrac{1}{4}a.$$

Poznámka. Pokud žák zná pojem mocnosti bodu ke kružnici, může napsat $|CM| \cdot |CB| = |CS|^2$, odkud ihned plyne $|CM| = \frac{1}{4}a$.

3. Je-li číslo $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ dělitelné číslem $100 = 2^2 \cdot 5^2$, musí být jedno z čísel $n-1$, n, $n+1$ dělitelné číslem 25, protože ze tří po sobě jdoucích čísel může být nejvýše jedno dělitelné pěti. Dále musí být buď číslo n dělitelné čtyřmi (čísla $n-1$, $n+1$ jsou pak lichá), nebo musí být číslo n liché (čísla $n-1$, $n+1$ jsou sudá a jejich součin je dělitelný čtyřmi). Máme tedy tyto možnosti:

$n = 25$ vyhovuje, neboť je liché,

$n = 75$ vyhovuje, neboť je liché,

$n = 50$ nevyhovuje, neboť je sudé, ale není dělitelné čtyřmi,

$n - 1 = 25$, $n = 26$ nevyhovuje, neboť je sudé, ale není dělitelné čtyřmi,

$n - 1 = 50$, $n = 51$ vyhovuje, neboť je liché,

$n - 1 = 75$, $n = 76$ vyhovuje, neboť je dělitelné čtyřmi,
$n + 1 = 25$, $n = 24$ vyhovuje, neboť je dělitelné čtyřmi,
$n + 1 = 50$, $n = 49$ vyhovuje, neboť je liché,
$n + 1 = 75$, $n = 74$ nevyhovuje, neboť je sudé, ale není dělitelné čtyřmi,
$n + 1 = 100$, $n = 99$ vyhovuje, neboť je liché.
Úloha má sedm řešení.