50. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie A

1. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo n, pro něž má soustava

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + y^2x + x^2y &= n, \\ x^2 + y^2 + x + y &= n + 1 \end{aligned}$$

pouze celočíselná řešení.

2. Určete všechna reálná čísla s a t, pro která je grafem funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + s}{t|x-1| + x + 7}$$

lomená čára složená ze dvou polopřímek.

3. Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní body M, N takové, že úhel MSN je ostrý. Libovolným bodem X menšího z oblouků MN veďme rovnoběžku s přímkou MS a označme Y její průsečík s úsečkou SN. Sestrojte takový bod X, pro který je obsah trojúhelníku SXY maximální.

4. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f\bigl(x^2 + f(y)\bigr) = (x-y)^2 \cdot f(x+y).$$

II. kolo kategorie A se koná

v úterý 16. ledna 2001

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Předpokládejme, že parametr n je přirozené číslo, a řešme danou soustavu v oboru reálných čísel. Levá strana první rovnice je rovna $(x^2+y^2)(x+y)$, a tak pro čísla $s=x+y$ a $t=x^2+y^2$ platí $t\cdot s=n$ a $t+s=n+1$. Čísla s, t jsou tedy kořeny kvadratické rovnice $w^2-(n+1)w+n=0$. Z rozkladu $w^2-(n+1)w+n=(w-n)(w-1)$ vidíme, že $\{s,t\}=\{1,n\}$. Dvojice (x,y) je tedy řešením původní soustavy, právě když je řešením jedné ze soustav

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=n \end{cases} \quad\text{nebo}\quad \begin{cases} x+y=n, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{1}$$

V prvním případě jsou čísla x, y kořeny kvadratické rovnice $z^2+(1-z)^2=n$. Jejím řešením dostaneme

$$\{x,y\}=\left\{\frac{1+\sqrt{2n-1}}{2},\frac{1-\sqrt{2n-1}}{2}\right\}. \tag{2}$$

Podobně z druhé soustavy v (1) plyne, že čísla x, y jsou kořeny kvadratické rovnice $z^2+(n-z)^2=1$. Její diskriminant $D=4(2-n^2)$ je nezáporný jedině pro $n=1$ (připomeňme, že n je přirozené), pak jsou ovšem obě soustavy v (1) totožné, takže žádné další řešení kromě (2) neexistuje.

Zjistili jsme, že pro každé přirozené číslo n jsou všechna řešení původní soustavy v oboru *reálných* čísel popsána vztahem (2). Jsou to celá čísla, právě když je hodnota $2n-1$ druhou mocninou (lichého) přirozeného čísla. Je-li číslo n čtyřmístné, pak $n \geqq 1\,000$, a tak $2n-1 \geqq 1\,999$. Protože $44^2=1\,936$ a $45^2=2\,025$, hledané číslo n určíme z rovnice $2n-1=2\,025$. Zřejmě $n=1\,013$.

Poznamenejme, že v první části řešení můžeme postupovat i takto: do první rovnice $(x^2+y^2)(x+y)=n$ lze dosadit za první činitel vyjádření $x^2+y^2=n+1-(x+y)$ z druhé rovnice. Tak získáme pro neznámou $s=x+y$ kvadratickou rovnici $(n+1-s)s=n$, jejíž kořeny jsou $s_1=1$ a $s_2=n$.

2. Předpokládejme, že s a t jsou (pevná) čísla požadované vlastnosti. Graf funkce f je sjednocením grafů funkcí f_1 a f_2, které jsou určeny vzorci

$$f_1(x)=\frac{x^2-4x+s}{(1-t)x+(t+7)},\quad f_2(x)=\frac{x^2-4x+s}{(t+1)x+(7-t)} \tag{1}$$

a mají definiční obory $D(f_1)=(-\infty,1\rangle$, $D(f_2)=\langle 1,\infty)$ (polopřímky bez jakýchkoliv vyloučených bodů, neboť hodnota $f(x)$ dle popisu grafu f existuje pro každé $x\in\mathbb{R}$). Čísla s a t určíme z podmínky, že grafy funkcí f_1 a f_2 jsou polopřímky (takže jde o lineární funkce). Zřejmě platí $t\neq\pm1$ (jinak by graf jedné z funkcí f_1, f_2 byl částí paraboly), proto můžeme lineární funkce ze jmenovatelů zlomků v (1) zapsat ve tvaru

$$(1-t)x+(t+7)=(1-t)(x-x_1),\quad\text{kde}\quad x_1=\frac{t+7}{t-1}, \tag{2a}$$

a

$$(t+1)x+(7-t)=(t+1)(x-x_2),\quad\text{kde}\quad x_2=\frac{t-7}{t+1}. \tag{2b}$$

Výhodu těchto rozkladů oceníme při vyjadřování podmínky, že obě funkce f_1 a f_2 jsou lineární. Předtím však poznamenejme, že hodnota $f_1(x)$ existuje pro každé $x \leqq 1$ a hodnota $f_2(x)$ pro každé $x \geqq 1$, právě když čísla x_1, x_2 z rozkladů (2) splňují podmínku

$$x_2 < 1 < x_1. \tag{3}$$

Vzorce (1) určují lineární funkce f_1 a f_2, právě když je kvadratický mnohočlen $x^2 - 4x + s$ dělitelný (beze zbytku) každým z lineárních mnohočlenů $(x - x_1)$ a $(x - x_2)$. Protože však podle (3) platí $x_1 \neq x_2$, lze podmínku z předchozí věty vyjádřit rovností mnohočlenů

$$x^2 - 4x + s = (x - x_1)(x - x_2). \tag{4}$$

Poznamenejme, že za podmínky (4) budou předpisy pro funkce f_1, f_2 tvaru

$$f_1(x) = \frac{x - x_2}{1 - t} \qquad \text{a} \qquad f_2(x) = \frac{x - x_1}{t + 1};$$

podmínka (3) zaručí, že polopřímky, které jsou grafy f_1 a f_2, neleží na téže přímce (kdyby ležely, nebyla by grafem f *lomená čára*): osu x totiž protne jak polopřímka $y = f_1(x)$ (v bodě $[x_2, 0]$), tak i polopřímka $y = f_2(x)$ (v bodě $[x_1, 0]$).

Podmínka (4) je s ohledem na (2) ekvivalentní s dvojicí rovnic

$$4 = \frac{t+7}{t-1} + \frac{t-7}{t+1} \quad \text{a} \quad s = \frac{t+7}{t-1} \cdot \frac{t-7}{t+1} = \frac{t^2 - 49}{t^2 - 1},$$

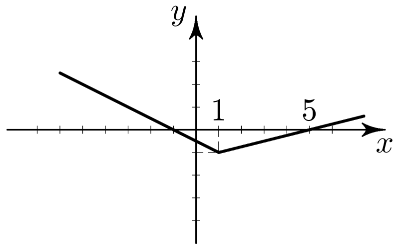
ze kterých určíme neznámé hodnoty s a t. Úpravou první rovnice vyjde $t^2 = 9$, možné hodnoty t jsou tedy ± 3; podle druhé rovnice jim odpovídá stejná hodnota $s = -5$. Je-li $t = 3$, platí podle (2) $x_1 = 5$ a $x_2 = -1$ (podmínka (3) je tehdy splněna), je-li $t = -3$, pak $x_1 = -1$ a $x_2 = 5$ (podmínka (3) splněna není). Řešením úlohy je tedy jediná dvojice $(s, t) = (-5, 3)$.

Přestože jsme celé řešení vedli tak, že zkouška nutná není, proveďme ji jak pro dvojici $(s, t) = (-5, 3)$, tak pro dvojici $(s, t) = (-5, -3)$. Pro první dvojici vychází

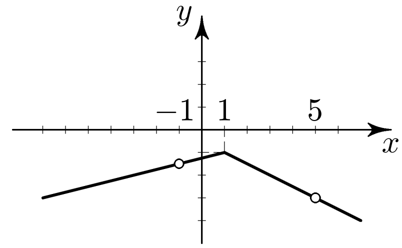
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{3|x-1| + x + 7} = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-5)}{-2(x-5)} = -\dfrac{x+1}{2} & (x \leqq 1), \\[2ex] \dfrac{(x+1)(x-5)}{4(x+1)} = \dfrac{x-5}{4} & (x \geqq 1), \end{cases}$$

takže opravdu jde o řešení (obr. 1a); dvojici $(s, t) = (-5, -3)$ odpovídá funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{-3|x-1| + x + 7} = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-5)}{4(x+1)} = \dfrac{x-5}{4} & (x \leqq 1,\ x \neq -1), \\[2ex] \dfrac{(x+1)(x-5)}{-2(x-5)} = -\dfrac{x+1}{2} & (x \geqq 1,\ x \neq 5), \end{cases}$$



Obr. 1a



Obr. 1b

jejímž grafem je lomená čára bez dvou bodů (obr. 1b), takže dvojici $(s,t)=(-5,-3)$ nelze považovat za řešení.

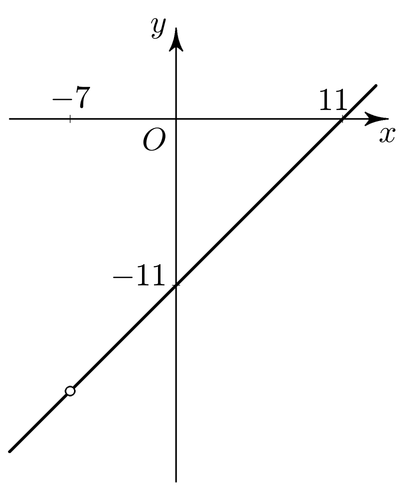
Poznámka. Někteří soutěžící patrně vyjádří podmínku linearity obou funkcí f_1 a f_2 (aniž zavedou čísla x_1, x_2) takto: mnohočlen x^2-4x+s je dělitelný jak mnohočlenem $(1-t)x+(t+7)$, tak i mnohočlenem $(t+1)x+(7-t)$, je tedy dělitelný i jejich součinem, tudíž platí rovnost mnohočlenů

$$\bigl((1-t)x+(t+7)\bigr)\bigl((t+1)x+(7-t)\bigr)=(1-t^2)(x^2-4x+s)$$

(koeficient $(1-t^2)$ se zjistí porovnáním kvadratických členů). Tento závěr je však korektní, jen když jsou oba lineární mnohočleny *nesoudělné*; v našem řešení je tato nesoudělnost zaručena podmínkou (3). Soudělným mnohočlenům ze jmenovatelů zlomků v (1) odpovídá „řešení“ $(s,t)=(-77,0)$ s příslušnou funkcí

$$f(x)=\frac{x^2-4x-77}{x+7}=x-11 \quad (x\in\mathbb{R},\ x\neq-7),$$

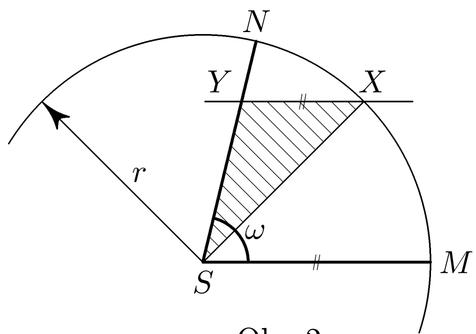
jejíž graf (obr. 1c) je sice složen ze dvou polopřímek, ale jejich společný počátek do grafu f nepatří (navíc tyto polopřímky svírají přímý úhel, takže jejich sjednocení není lomená čára).



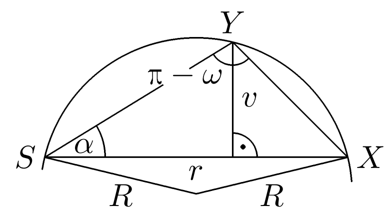
Obr. 1c

3. Ve všech řešeních značíme $\omega = |\sphericalangle MSN|$.

Řešení 1. Z rovnoběžnosti přímek SM a XY plyne rovnost $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$ (obr. 2). Proto se všechny uvažované trojúhelníky SXY shodují nejen v délce strany SX (rovné poloměru r kružnice k) ale i ve velikosti protilehlého vnitřního úhlu SYX. Kružnice opsané všem trojúhelníkům SXY mají tedy týž poloměr R (rovný $\dfrac{r}{2\sin\omega}$), a bod Y leží vždy na tom jejich oblouku, ze kterého je tětiva SX délky r vidět pod úhlem $\pi - \omega$. Výška v ke straně SX trojúhelníku SYX tudíž zřejmě nepřevyšuje výšku kruhové úseče z obr. 3, přitom je rovna této výšce, právě když platí $|SY| = |XY|$. Proto má ze všech trojúhelníků SXY největší obsah právě ten, který má shodné strany SY a XY. Jeho vnitřní úhel α u vrcholu S je shodný s vnitřním úhlem u vrcholu X, a tak platí $2\alpha + (\pi - \omega) = \pi$, odkud $\alpha = \frac{1}{2}\omega$, což znamená, že polopřímka SX je osou úhlu MSN. Průsečík této osy s kružnicí k proto určuje hledaný bod X.



Obr. 2



Obr. 3

Dodejme, že maximální výšku v trojúhelníku SXY ke straně SX lze určit i jiným postupem (bez úvah o kruhové úseči): označíme-li Y_0 patu výšky z vrcholu Y, $\alpha = |\sphericalangle XSY|$ a $\beta = |\sphericalangle SXY|$, potom platí

$$v \cdot \operatorname{cotg}\alpha + v \cdot \operatorname{cotg}\beta = |SY_0| + |XY_0| = |SX| = r,$$

odkud s ohledem na to, že $\alpha + \beta = \omega$ a že funkce cotg je v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ konvexní, vychází odhad

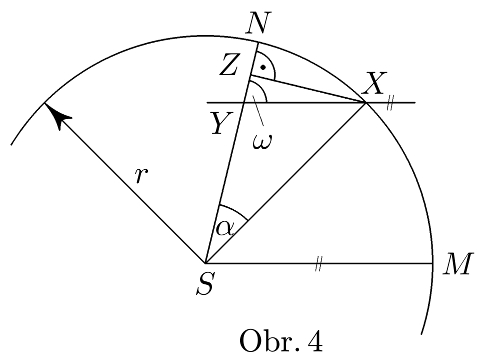
$$v = \frac{r}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} \leqq \frac{r}{2\operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{r}{2\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}} = \frac{r}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}.$$

Řešení 2. Označme $p = |XY|$ a $q = |SY|$. Podle kosinové věty pro trojúhelník SXY platí $r^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cdot \cos\omega$, neboť $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$. Vypsanou rovnost upravíme do tvaru $r^2 = (p-q)^2 + 2pq(1 + \cos\omega)$, z něhož už snadno odhadneme velikost součinu pq shora:

$$pq = \frac{r^2 - (p-q)^2}{2(1+\cos\omega)} \leqq \frac{r^2}{2(1+\cos\omega)},$$

přitom rovnost nastane, právě když $p = q$. To je i podmínka, za které je obsah $\frac{1}{2}pq\sin\omega$ trojúhelníku SXY maximální. Došli jsme tak ke stejnému závěru jako při prvním řešení.

Řešení 3. Vyjádřeme obsah trojúhelníku SXY jako funkci úhlu $\alpha = |\sphericalangle XSN|$ a zjistěme její největší hodnotu v intervalu $0 < \alpha < \omega$. Při označení z obr. 4 platí $|XZ| = |SX|\sin\alpha = r\sin\alpha$; protože $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$ a $|\sphericalangle SXY| = \omega - \alpha$, ze sinové



Obr. 4

věty pro trojúhelník SXY vychází

$$|SY| = |SX| \cdot \frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega} = r \cdot \frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}.$$

Pro obsah P trojúhelníku SXY tak dostáváme vyjádření

$$P = \frac{|SY| \cdot |XZ|}{2} = \frac{r^2 \sin\alpha \sin(\omega-\alpha)}{2\sin\omega} = \frac{r^2\bigl(\cos(2\alpha-\omega) - \cos\omega\bigr)}{4\sin\omega}$$

(využili jsme vzorec $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ pro $x = \alpha$ a $y = \omega - \alpha$). Proto pro hodnotu P platí horní odhad

$$P \leqq \frac{r^2(1-\cos\omega)}{4\sin\omega} \quad \left(= \frac{r^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right),$$

přitom rovnost nastane právě v případě, kdy $\cos(2\alpha - \omega) = 1$, což je v naší situaci splněno jedině pro $\alpha = \frac{1}{2}\omega$ (z nerovností $0 < \alpha < \omega$ totiž plyne odhad $|2\alpha - \omega| < \omega$).

Za úplné řešení je 6 bodů. Vyjádření obsahu trojúhelníku SXY jako explicitní funkce některé (jedné!) z vhodných proměnných ($|\sphericalangle XSN|$, $|YS|$, $|XY|$) oceňte 3 body. Za povšimnutí, že všechny trojúhelníky SXY mají stejný úhel při vrcholu Y, udělte 1 bod.

4. Předpokládejme, že f je libovolná z hledaných funkcí. Všimněme si, že levá strana dané rovnice je sudá funkce proměnné x. Při záměně čísla x opačným číslem $-x$ se proto nezmění ani hodnota pravé strany rovnice:

$$(x-y)^2 \cdot f(x+y) = (-x-y)^2 \cdot f(-x+y)$$

neboli

$$(x-y)^2 \cdot f(x+y) = (x+y)^2 \cdot f(y-x).$$

Dosaďme sem při libovolném $t \in \mathbb{R}$ hodnoty $x = \frac{1}{2}(t-1)$ a $y = \frac{1}{2}(t+1)$, které jsou zvoleny tak, aby platilo $x+y=t$ a $y-x=1$. Dostaneme vztah $f(t) = t^2 \cdot f(1)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Funkce f je tedy nutně tvaru $f(x) = cx^2$, přitom neznámý koeficient c zjistíme tak, že dosadíme do rovnosti ze zadání (a tak vlastně současně provedeme i *zkoušku*): rovnice $c(x^2+cy^2)^2 = (x-y)^2 \cdot c(x+y)^2$ je ekvivalentní s rovnicí $c(c+1)y^2(2x^2+(c-1)y^2) = 0$, jež je splněna pro libovolná x a y, právě když $c=0$ nebo $c=-1$ (např. dosazení $x=y=1$ vede k podmínce $c(c+1)^2=0$, takže nutně $c \in \{0,-1\}$).

Úloha má právě dvě řešení: nulovou funkci $f_1(x) = 0$ a funkci $f_2(x) = -x^2$.