50. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie B

1. Určete všechna reálná čísla p taková, že pro libovolná kladná čísla x, y platí nerovnost

$$\frac{x^3 + py^3}{x + y} \geqq xy.$$

2. Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte rovnoběžník $KLMN$ tak, aby jeho vrcholy K a L ležely na straně AB, vrchol M na straně BC, vrchol N na straně AC a aby trojúhelníky AKN, LBM a NMC měly stejné obsahy.

3. Určete všechna přirozená čísla n, pro která je podíl

$$\frac{(n^2)_{10}}{(n_{10})^2}$$

celé číslo. Zápis z_{10} značí číslo, které vznikne zaokrouhlením čísla z na desítky.

4. Najděte všechny ostroúhlé trojúhelníky ABC, jejichž těžiště T splývá s průsečíkem výšek trojúhelníku PQR, přičemž body P, Q, R jsou po řadě průsečíky polopřímek opačných k polopřímkám TA, TB, TC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC.

II. kolo kategorie B se koná

v úterý 27. března 2001

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Nerovnost je pro kladná x, y zřejmě ekvivalentní se vztahem

$$y^2(py - x) - x^2(y - x) \geqq 0.$$

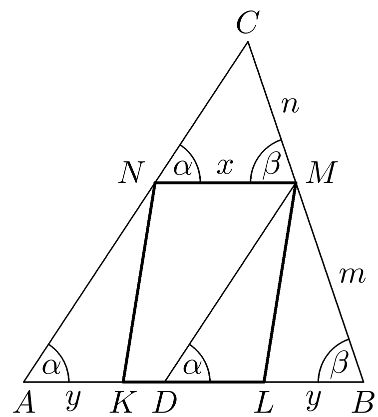
Je-li $p \geqq 1$, dostáváme

$$y^2(py - x) - x^2(y - x) \geqq y^2(y - x) - x^2(y - x) = (x + y)(y - x)^2 \geqq 0.$$

Je-li však $p < 1$, neplatí daná nerovnost například pro $x = y = 1$.

Závěr: Daná nerovnost je splněna pro každá dvě kladná čísla x, y, právě když $p \geqq 1$.

2. Předpokládejme, že rovnoběžník $KLMN$ má požadované vlastnosti. V posunutí o vektor $\boldsymbol{NM}$ (obr. 1) je obrazem trojúhelníku AKN trojúhelník DLM. Vzniklý trojúhelník DBM má mít (dle zadání) dvakrát větší obsah než trojúhelník NMC a je tomuto trojúhelníku podobný (věta uu). Koeficient k podobnosti, která převádí trojúhelník DBM na trojúhelník NMC, je odmocninou z podílu obsahů těchto trojúhelníků a zároveň podílem délek libovolných dvou v podobnosti si odpovídajících úseček: $k = \sqrt{2} = \dfrac{|BM|}{|MC|}$. Z podmínky rovnosti obsahů trojúhelníků LBM, DLM a AKN, jejichž výšky na strany LB, DL a AK jsou shodné, navíc plyne $|LB| = |DL| = |AK|$.



Obr. 1

Odtud plyne *konstrukce*: Na úsečce BC sestrojíme bod M tak, aby $|BM| : |MC| = \sqrt{2} : 1$. Rovnoběžka s přímkou AC vedená bodem M protne úsečku AB v bodě D. Vrchol N nalezneme jako průsečík úsečky AC s přímkou, která prochází bodem M rovnoběžně s AB. Bod L sestrojíme jako střed úsečky DB, bod K je pak obrazem bodu L v posunutí o vektor $\boldsymbol{MN}$.

Výsledkem konstrukce je rovnoběžník $KLMN$ (jediný pro každý trojúhelník ABC), o němž se snadno přesvědčíme, že má požadované vlastnosti.

Jiné řešení. Z rovností obsahů trojúhelníků AKN a LBM se shodnými výškami na strany AK a LB plyne shodnost těchto stran. Označme (obr. 1) $|AB| = c$, $|NM| = |KL| = x$, $|BM| = m$ a $|MC| = n$ a $|LB| = |AK| = y$; zřejmě $c = 2y + x$, takže $y = \frac{1}{2}(c - x)$. Trojúhelníky NMC a LBM mají stejné obsahy, je tedy $\frac{1}{2}xn \sin\beta = \frac{1}{2}ym \sin\beta$ neboli $xn = ym$. Po dosazení za y a úpravě máme

$$x(m + 2n) = mc. \tag{1}$$

Z podobnosti trojúhelníků NMC a ABC plyne úměra $x : c = n : (m + n)$ neboli

$$nc = x(m + n), \tag{2}$$

takže z rovnosti součinu levých a součinu pravých stran vztahů (1) a (2) dostaneme $m = n\sqrt{2}$, tj. $\dfrac{|BM|}{|MC|} = m : n = \sqrt{2}$. Odtud vyplývá *konstrukce* podobně jako v předchozím řešení.

3. Položme $m = \dfrac{(n^2)_{10}}{(n_{10})^2}$ a $n = 10k + r$, kde k je celé nezáporné a r je poslední cifra čísla n, tj. $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Zřejmě je m celé pro všechna n, která mají $r = 0$ a $k > 0$. Pokud je $k = 0$ a $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, není zlomek m definován.

Nechť je $k > 0$ a $r \in \{1, 2\}$. Pak $m = \dfrac{100k^2 + 20kr}{100k^2} = 1 + \dfrac{r}{5k}$, což není celé číslo.

Pro $k > 0$ a $r = 3$ platí $m = \dfrac{100k^2 + 60k + 10}{100k^2} = 1 + \dfrac{6k+1}{10k^2}$. Čitatel posledního zlomku není na rozdíl od jmenovatele dělitelný deseti, tedy m není celé číslo.

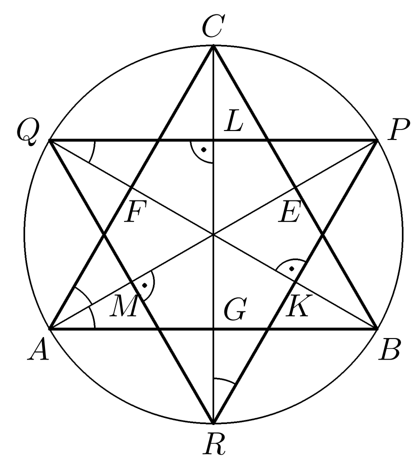
Je-li $k > 0$ a $r = 4$, máme $m = \dfrac{100k^2 + 80k + 20}{100k^2} = 1 + \dfrac{4k+1}{5k^2}$. Odtud $m = 2$ pro $k = 1$. Pro $k > 1$ je $\dfrac{4k+1}{5k^2} = \dfrac{4k+1}{(4k+k)k} < \dfrac{4k+1}{(4k+1)k} = \dfrac{1}{k}$, a tak m nemůže být celé číslo.

Je-li konečně $r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, dostáváme

$$m = \frac{100k^2 + 20kr + (r^2)_{10}}{100(k+1)^2} < \frac{100k^2 + 200k + 100}{100(k+1)^2} = 1.$$

Závěr: m je celé číslo pro všechna přirozená čísla n, jejichž dekadický zápis končí cifrou 0 a pro $n = 14$.

4. Pravoúhlé trojúhelníky LRP a KQP na obr. 2 jsou podobné, protože mají společný ostrý úhel při vrcholu P. Využijeme-li navíc, že obvodové úhly příslušné témuž oblouku jsou shodné, dostáváme $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CRP| = |\sphericalangle LRP| = |\sphericalangle KQP| = |\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle BAP|$. Bod E je střed úsečky BC, tětivy CP a BP příslušné shodným obvodovým úhlům ACP a BAP jsou shodné. Trojúhelník CEP je tedy shodný s trojúhelníkem BEP podle věty *sss*, tudíž úhly AEB a BEP stejně jako úhly AEB a AEC jsou shodné (a pravé). Odtud plyne i shodnost trojúhelníků AEC a AEB podle věty *sus*. Je tedy $|AC| = |AB|$. Analogicky zjistíme, že $|AB| = |BC|$.



Obr. 2

Závěr: Daným podmínkám vyhovují jen rovnostranné trojúhelníky ABC.

Poznámka. Rovnost $|CP| = |BP|$ lze dokázat i jinak, například na základě poznatku, že obrazy ortocentra v souměrnostech podle stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané (viz pomocnou úlohu 2 ke čtvrté úloze domácího kola). Těžiště T trojúhelníku ABC je zároveň ortocentrem trojúhelníku PQR. Proto jsou obrazem úsečky TP v osových souměrnostech podle přímek PQ a PR po řadě úsečky CP a BP, které jsou tudíž shodné.