50. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie C

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro které platí

$$a + b + D(a, b) + n(a, b) = 50,$$

kde $D(a, b)$ značí největší společný dělitel a $n(a, b)$ nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b.

2. Kružnice $k(S, r)$ a $l(O, R)$ se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná tečna v bodě T protíná jejich vnější společnou tečnu v bodě M. Dokažte, že trojúhelník SOM je pravoúhlý, a vyjádřete jeho obsah pomocí poloměrů r, R daných kružnic.

3. Najděte všechny dvojice kladných čísel x, y, které jsou řešením soustavy rovnic

$$x \cdot y_{10} = 195{,}6,$$
$$y \cdot x_{10} = 241{,}7.$$

Zápis z_{10} značí číslo, které vznikne zaokrouhlením čísla z na desítky.

4. Sestrojte trojúhelník ABC takový, že výška a těžnice z vrcholu C dělí těžnici z vrcholu A na tři shodné úsečky, je-li dána délka strany AB a velikost výšky z vrcholu C.

II. kolo kategorie C se koná

v úterý 27. března 2001

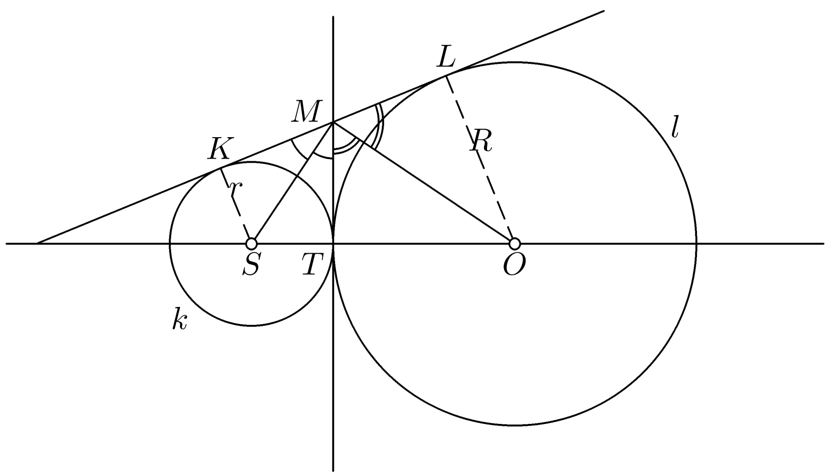
tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Položme $a = Dk$, $b = Dl$, kde $D = D(a, b)$ je největší společný dělitel čísel a, b, takže čísla k, l jsou nesoudělná. Je pak $n = n(a, b) = Dkl$ a má platit $D(k+l+1+kl) = 50$, tedy $(1+k)(1+l)D = 50$. Najdeme proto všechny rozklady čísla 50 na součin tří přirozených čísel D, $1+k$, $1+l$, z nichž poslední dvě jsou větší než 1. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leqq b$, tj. $k \leqq l$. Dostaneme tak tyto možnosti:

D	$1+k$	$1+l$	k	l	a	b
1	2	25	1	24	1	24
1	5	10	4	9	4	9
5	2	5	1	4	5	20

Pro $D = 2$ dostaneme $k = l = 4$, ale k, l mají být nesoudělná.
Pro $D = 10$, 25 nebo 50 dostaneme $k = 0$, což nevede k žádnému řešení.
Úloha má šest řešení: $\{a, b\} = \{1, 24\}$, $\{a, b\} = \{4, 9\}$, $\{a, b\} = \{5, 20\}$.

2. Označme K, L body dotyku té společné tečny obou kružnic, na které leží také bod M a která je různá od společné tečny v bodě T (obr. 1). Ze souměrnosti podle přímky MS plyne shodnost úhlů KMS a TMS a ze souměrnosti podle přímky OM plyne shodnost úhlů LMO a TMO. Součet těchto čtyř úhlů je 180°, proto $|\sphericalangle SMO| = |\sphericalangle SMT| + |\sphericalangle TMO| = 90°$. Tím je vyřešena první část úlohy.



Obr. 1

Užitím Pythagorovy věty pro trojúhelníky SOM, STM a OTM dostaneme pro výšku $v = |TM|$ trojúhelníku SOM rovnost

$$(r + R)^2 = (r^2 + v^2) + (R^2 + v^2),$$

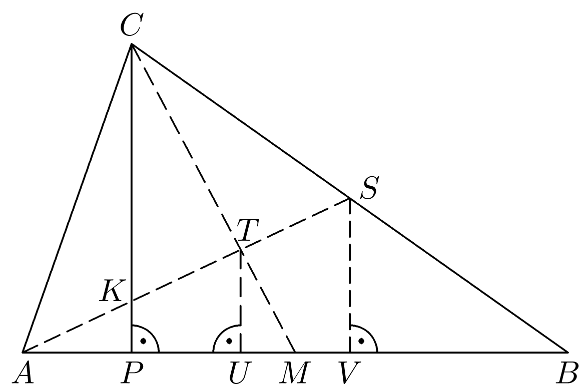
odkud $v^2 = Rr$. (Tento vztah plyne i přímo z Eukleidovy věty pro trojúhelník SOM.)
Obsah trojúhelníku SOM je tedy $\frac{1}{2}(R + r)\sqrt{Rr}$.

3. Jsou-li x, y řešením, musí být $x \geqq 5$ a $y \geqq 5$, jinak by se x_{10} nebo y_{10} rovnalo nule. Protože $y_{10} \geqq 10$, je $x = 195{,}6 : y_{10} \leqq 19{,}56$, takže x_{10} se rovná 10 nebo 20. V prvním případě je $y = 24{,}17$, $y_{10} = 20$ a $x = 9{,}78$, v druhém případě je $y = 12{,}085$, $y_{10} = 10$ a $x = 19{,}56$. Úloha má právě dvě řešení:

$$(x, y) = (19{,}56; 12{,}085) \quad \text{a} \quad (x, y) = (9{,}78; 24{,}17).$$

Za úplné řešení je 6 bodů.

4. Předpokládejme, že trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy. Označme S střed strany BC, M střed strany AB, T těžiště trojúhelníku, P patu výšky vedené bodem C, K průsečík těžnice AS a výšky CP. Protože těžiště T dělí úsečku AS v poměru $2 : 1$, tj. platí $|AT| = 2|TS|$, musí být bod K středem úsečky AT (obr. 2). Z rovnosti $|AK| = |KT| = |TS|$ navíc plyne, že $|AP| = |PU| = |UV|$, kde U, V jsou kolmé průměty bodů T, S na přímku AB. Jelikož S je střed strany BC, je V střed úsečky PB. Proto $|AP| = \frac{1}{5}|AB|$. Odtud již plyne *konstrukce*: Sestrojíme úsečku AB dané délky, na ní bod P tak, aby $|AP| = \frac{1}{5}|AB|$. Bodem P vedeme kolmici k AB, na ni naneseme od bodu P danou výšku a dostaneme tak bod C, a tím i trojúhelník ABC.



Obr. 2

Důkaz správnosti konstrukce. V sestrojeném trojúhelníku ABC uvažujme těžnice CM a AS, těžiště T a průsečík K úseček AS, CP. Označme U, V kolmé průměty bodů T, S na přímku AB. Protože $|CT| = 2|TM|$, je $|PU| = 2|UM|$, a proto $|PU| = \frac{2}{3}|PM|$. Označíme-li $c = |AB|$, je $|AP| = \frac{1}{5}c$, $|PV| = \frac{1}{2}(|AB| - |AP|) = \frac{2}{5}c$, $|PM| = \frac{1}{2}c - \frac{1}{5}c = \frac{3}{10}c$, $|PU| = \frac{2}{3}|PM| = \frac{1}{5}c$ a $|UV| = |PV| - |PU| = \frac{1}{5}c$. Protože $|AP| = |PU| = |UV|$, je také $|AK| = |KT| = |TS|$. Tím je správnost konstrukce dokázána.