50. ročník matematické olympiády, III. kolo kategorie A

Praha, 1.–4. dubna 2001

1. *Určete všechny mnohočleny P takové, že pro všechna reálná čísla x platí*

$$\big(P(x)\big)^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x).$$

(P. Calábek)

Řešení. Je-li mnohočlen P konstantní, tedy $P(x) = a$, pak číslo a splňuje dle zadání podmínku $a^2+a = a+a$, takže $a = 0$ nebo $a = 1$. Oba mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ jsou řešením úlohy.

Je-li stupeň n mnohočlenu P kladný, pak $P(x) = ax^n + Q(x)$, kde a je číslo různé od nuly a Q je mnohočlen stupně nejvýše $n-1$. Porovnáme-li v rovnosti

$$\big(ax^n + Q(x)\big)^2 + a(-x)^n + Q(-x) = ax^{2n} + Q(x^2) + ax^n + Q(x) \tag{1}$$

koeficienty u nejvyšší mocniny x^{2n}, dostaneme podmínku $a^2 = a$, ze které plyne $a = 1$ (připomeňme, že $a \neq 0$). Rovnost (1) po dosazení hodnoty $a = 1$ upravíme do ekvivalentního tvaru

$$2x^n Q(x) + \big(Q(x)\big)^2 - Q(x^2) = [1-(-1)^n]x^n + Q(x) - Q(-x). \tag{2}$$

Připusťme, že mnohočlen Q má kladný stupeň k ($k < n$). Pak na levé straně (2) stojí mnohočlen stupně alespoň $n+k$, což je sporu s tím, že na pravé straně (2) je mnohočlen stupně nejvýše n. Proto je Q konstantní mnohočlen, tedy $Q(x) = b$ pro vhodné číslo b. Po dosazení do (2) dostáváme podmínku $2bx^n + b^2 - b = [1-(-1)^n]x^n$, která je splněna pro každé x, právě když $2b = 1-(-1)^n$ a zároveň $b^2 - b = 0$. Pro sudé n vychází jedině $b = 0$ (takže $P(x) = x^n$), pro liché n vyjde $b = 1$ (takže $P(x) = x^n + 1$).

Odpověď: Hledané mnohočleny jsou konstanty 0 a 1, jednočleny x^2, x^4, x^6, ... a dvojčleny $x+1$, x^3+1, x^5+1, ...

Jiné řešení. Přičteme-li $P(-x)$ k oběma stranám dané rovnosti, dostaneme rovnost $\big(P(x)\big)^2 + 2P(-x) = P(x^2) + P(x) + P(-x)$, na jejíž pravé straně je sudá funkce proměnné x. Proto je sudá i funkce na levé straně: pro každé x platí $\big(P(x)\big)^2 + 2P(-x) = \big(P(-x)\big)^2 + 2P(x)$, neboli

$$\big(P(x) - P(-x)\big) \cdot \big(P(x) + P(-x) - 2\big) = 0.$$

Jeden z obou činitelů na levé straně poslední rovnosti je tedy nulový mnohočlen. Pokud platí identicky $P(x) - P(-x) = 0$, redukuje se rovnost ze zadání úlohy na $\big(P(x)\big)^2 = P(x^2)$; pokud platí identicky $P(x)+P(-x)-2 = 0$, pak pro mnohočlen Q definovaný rovností $Q(x) = P(x) - 1$ platí $Q(-x) = -Q(x)$ a dosazením a snadnou úpravou se zjistí, že rovnost ze zadání přejde do tvaru $\big(Q(x)\big)^2 = Q(x^2)$.

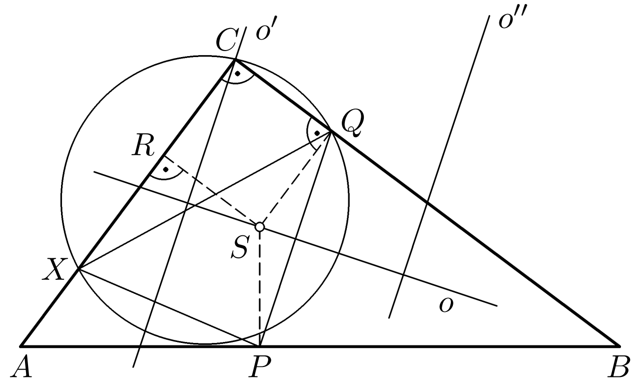
Shrneme-li tedy oba případy, zjistíme, že v každém z nich máme určit mnohočlen R, který je sudou nebo lichou funkcí a splňuje pro každé x rovnost $\big(R(x)\big)^2 = R(x^2)$. Hledejme taková R nejdříve mezi jednočleny: po dosazení $R(x) = ax^n$ zjistíme, že je buď $a = 0$, nebo $a = 1$ a $n \geqq 0$ libovolné. Připusťme, že R není jednočlen, tedy $R(x) = ax^n + bx^k + S(x)$, kde a, b jsou čísla různá od nuly, $n > k$ a S je nulový mnohočlen nebo mnohočlen stupně nejvýše $k-1$. Porovnáme-li v rovnosti

$$\big(ax^n + bx^k + S(x)\big) \cdot \big(ax^n + bx^k + S(x)\big) = ax^{2n} + bx^{2k} + S(x)$$

koeficienty členů s mocninou x^{n+k}, dostaneme rovnost $2ab = 0$, která je ve sporu s tím, že $a \neq 0$ a $b \neq 0$. Proto podmínku $\big(R(x)\big)^2 = R(x^2)$ splňují pouze mnohočleny R rovné 0, 1, x, x^2, x^3, ...

2. *V rovině je dán trojúhelník PQX, kde $|PQ| = 3$ cm, $|PX| = 2{,}6$ cm, $|QX| = 3{,}8$ cm. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby se jemu vepsaná kružnice dotýkala přepony AB v bodě P, odvěsny BC v bodě Q a aby bod X ležel na přímce AC.* *(J. Šimša)*

Řešení. Označme ještě R bod dotyku s odvěsnou AC a S střed zmíněné kružnice (obr. 1). Protože $SQCR$ je čtverec a bod S leží na ose o úsečky PQ, leží bod C na přímce o', která je obrazem osy o v otočení kol bodu Q o pravý úhel. Vrchol C proto sestrojíme jako průsečík přímky o' s Thaletovou kružnicí τ nad průměrem QX. Zbytek konstrukce je zřejmý.



Obr. 1

Úloha má (pro dané body P, Q, X) jediné řešení. I když osu o můžeme kol bodu Q otočit o pravý úhel dvěma způsoby, jedna z otočených přímek o'' kružnici τ vůbec neprotne; druhá z nich má s kružnicí τ sice dva společné body, ale jednomu z nich odpovídá takový trojúhelník ABC, že místo kružnice vepsané má požadované vlastnosti kružnice *připsaná* přeponě AB (bod Q jejího dotyku s přímkou BC neleží na odvěsně BC, ale na jejím prodloužení za vrchol B).

3. *Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c, pro které je množinou řešení nerovnice*

$$\sqrt{2x^2 + ax + b} > x - c$$

s neznámou x množina $(-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$. *(P. Černek)*

Řešení. Označme $(*)$ danou nerovnici a $\mathsf{K} = (-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$ příslušnou množinu (všech) řešení. Z toho, že 0 patří do K, plyne pro b podmínka $b \geqq 0$ a zároveň $\sqrt{b} > -c$. Kdyby však platilo $b > 0$, byl by výraz $\sqrt{2x^2 + ax + b}$ definován v některém okolí bodu $x = 0$ a z (ostré) nerovnosti $(*)$ pro $x = 0$ by plynula její platnost i pro malá kladná čísla x, což je ve sporu s tvarem množiny K. Proto musí být $b = 0$ a z nerovnosti $\sqrt{b} > -c$ plyne podmínka $c > 0$.

Protože $\sqrt{2x^2 + ax + b} = \sqrt{x(2x + a)}$ a protože množina K obsahuje všechna čísla $x > 1$, platí pro taková x nerovnost $2x + a \geqq 0$, která znamená, že $a \geqq -2$. Protože $1 \notin \mathsf{K}$, nerovnost $\sqrt{2 + a} > 1 - c$ neplatí, její levá strana však má díky nerovnosti $a \geqq -2$ smysl. Proto naopak platí $\sqrt{2 + a} \leqq 1 - c$, odkud plyne podmínka $c \leqq 1$. Kdyby platila ostrá nerovnost $\sqrt{2 + a} < 1 - c$, nerovnost $\sqrt{x(2x + a)} < x - c$ by byla splněna nejen pro $x = 1$, ale také pro $x = 1 + \varepsilon$ s dostatečně malým $\varepsilon > 0$, což je ve sporu s tím, že $1 + \varepsilon \in \mathsf{K}$. To znamená, že $\sqrt{2 + a} = 1 - c$, odkud $a = (1 - c)^2 - 2 = c^2 - 2c - 1$.

Shrňme výsledky našich úvah: zjistili jsme, že každá vyhovující trojice čísel (a, b, c) je nutně tvaru $(c^2 - 2c - 1, 0, c)$, kde $0 < c \leqq 1$. Ukažme nyní, že obráceně každá trojice popsaného tvaru má požadované vlastnosti. Řešme proto v oboru reálných čísel nerovnici

$$\sqrt{x(2x+a)} > x - c, \tag{1}$$

pro pevně zvolené $c \in (0, 1\rangle$ a odpovídající $a = c^2 - 2c - 1$.

Z nerovností $0 < c \leqq 1$ a vyjádření $a = (1-c)^2 - 2$ plyne, že $-2 \leqq a < -1$. Pro každé $x \leqq 0$ tudíž platí $2x + a < 0$, takže levá strana (1) má smysl a je nezáporná, zatímco pravá strana (1) je pro takové x záporná (neboť $x - c \leqq -c < 0$). Proto celý interval $(-\infty, 0\rangle$ patří do množiny řešení (1). Nepatří tam však žádné číslo x z intervalu $(0, -\frac{1}{2}a)$, neboť pro ně nemá smysl levá strana (1). Zbývá tedy vyřešit nerovnici (1) na intervalu $\langle -\frac{1}{2}a, \infty)$. Zdůvodníme předtím, že pro krajní bod $-\frac{1}{2}a$ platí odhady $c \leqq -\frac{1}{2}a \leqq 1$. Skutečně, horní odhad okamžitě plyne z toho, že $a \geqq -2$, dolní odhad se snadno odvodí ze zřejmé nerovnosti $c^2 \leqq 1$:

$$-\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}(c^2 - 2c - 1) = c + \frac{1}{2}(1 - c^2) \geqq c.$$

Pro každé $x \in \langle -\frac{1}{2}a, \infty)$ platí tedy $x \geqq c$, a proto jsou obě strany nerovnice (1) nezáporné. Po umocnění obou stran na druhou a snadné úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnici $x^2 + (a + 2c)x - c^2 > 0$. Odtud po dosazení $a = c^2 - 2c - 1$ vychází nerovnice $(x-1)(x+c^2) > 0$, která platí pro právě ta (kladná) čísla $x \in \langle -\frac{1}{2}a, \infty)$, která jsou větší než 1 (zopakujme, že $-\frac{1}{2}a \leqq 1$). Tím je dokázáno, že množinou řešení nerovnice (1) je skutečně množina K ze zadání úlohy.

Odpověď: Hledané trojice jsou $(a, b, c) = (c^2 - 2c - 1, 0, c)$, kde c je libovolné číslo z intervalu $(0, 1\rangle$.

---

4. *V jistém jazyce je n písmen. Skupina písmen (napsaných za sebou) je slovo, právě když se mezi žádnými dvěma stejnými písmeny nenacházejí dvě stejná písmena. Určete počet všech slov maximální délky.* *(K. Černeková)*

Řešení. V žádném slově zřejmě nemohou být čtyři stejná písmena. Maximální možná délka slova uvažovaného jazyka je tedy $3n$ (skupina n trojic stejných písmen za sebou je zřejmě slovo). Zároveň je jasné, že pro $n = 1$ existuje jediné slovo délky 3.

Nechť $n \geqq 2$.

1. *Každé slovo začíná dvěma stejnými písmeny.* Kdyby tomu tak nebylo, měli bychom slovo $AB \ldots A \ldots A \ldots$ začínající dvojicí různých písmen A, B. Další písmeno B se však nemůže vyskytovat mezi prvním a druhým písmenem A (jedno už tam je), ani za třetím písmenem A (dvě A by byla mezi dvěma B). Obě zbývající písmena B by tedy musela být mezi druhým a třetím písmenem A, což také není možné.

2. *Vypustíme-li ze slova maximální délky $3n$ tři stejná písmena, dostaneme v jazyce s $n-1$ písmeny opět slovo maximální délky $3(n-1)$.*

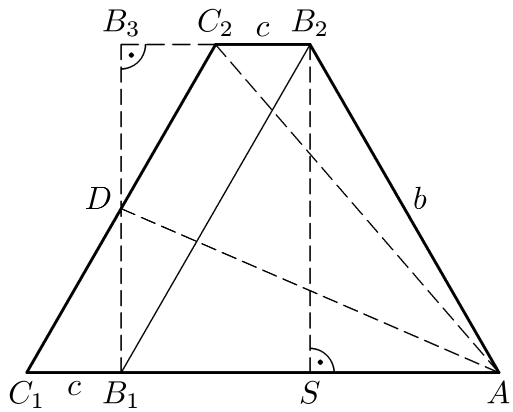
Počet slov maximální délky v jazyce s n písmeny označme p_n. Zjistíme, kolik je slov maximální délky začínajících zvoleným písmenem A. Každé takové slovo začíná dvěma písmeny A, takže třetí písmeno je buď opět A (takových slov je zřejmě tolik, kolik je slov maximální délky obsahujících $n-1$ písmen, tj. p_{n-1}), nebo písmeno $B \neq A$. Protože po vypuštění všech písmen A dostaneme opět slovo (a to musí začínat, jak už víme, dvěma stejnými písmeny), musí původní slovo začínat skupinou $AABAB$ (možnost $AABB \ldots A$ zřejmě nepřichází v úvahu). Takových slov je opět p_{n-1}. Celkem je tedy $2p_{n-1}$ slov maximální délky začínajících zvoleným písmenem A. To znamená, že $p_n = 2np_{n-1}$, odkud snadno plyne, že

$$p_n = 2^{n-1} n! p_1 = 2^{n-1} n!.$$

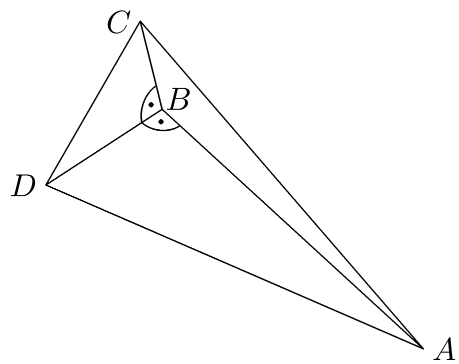
Nalezený vzorec vyhovuje i pro $n = 1$.

5. *Z papíru byl vystřižen rovnoramenný lichoběžník $C_1AB_2C_2$ s kratší základnou B_2C_2. Patu kolmice ze středu D ramena C_1C_2 na základnu AC_1 označíme B_1. Po přehnutí papíru podél úseček DB_1, AD a AC_2 se body C_1, C_2 přemístily v prostoru do jednoho bodu C a body B_1, B_2 do bodu B. Vznikl tak model čtyřstěnu $ABCD$ s objemem $64\,\mathrm{cm}^3$. Určete délky stran původního lichoběžníku.* *(P. Leischner)*

Řešení. Z rovnosti úseček, jež v popsané síti odpovídají týmž hranám výsledného čtyřstěnu $ABCD$, dostáváme, že $|AB_1| = |AB_2| = |AB| = b$, $|B_1C_1| = |B_2C_2| = |BC| = c$. Označme S střed úsečky AB_1 a B_3 patu kolmice z bodu D na přímku B_2C_2 (obr. 2). Trojúhelníky B_1C_1D a B_3C_2D jsou středově souměrné podle bodu D, proto $|B_3C_2| = |B_1C_1| = c$. Protože lichoběžník $C_1AB_2C_2$ je rovnoramenný, je rovnoramenný i trojúhelník B_1AB_2 (vzhledem k předchozím rovnostem je dokonce rovnostranný), a z obdélníku $B_1SB_2B_3$ tak plyne $\frac{1}{2}b = |B_1S| = |B_2B_3| = 2c$, takže $b = 4c$.



Obr. 2



Obr. 3

Nyní si už jen uvědomíme, že sestavený čtyřstěn $ABCD$ bude mít dvě pravoúhlé stěny CDB a ADB s pravými úhly při vrcholu B (obr. 3), což znamená, že hrana BD bude kolmá ke stěně ABC. Přitom výška v trojúhelníku ABC (neboli trojúhelníku AB_2C_2) na stranu BC je zároveň výškou B_2S rovnostranného trojúhelníku B_1AB_2, takže $v = \frac{1}{2}\sqrt{3}b$ a zároveň $|BD| = |B_1D| = \frac{1}{2}v$. Objem V čtyřstěnu $ABCD$ tedy spočteme jako

$$V = \frac{1}{3}S(ABC)|BD| = \frac{1}{3}S(AB_2C_2)\cdot\frac{1}{2}v = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}cv\cdot\frac{1}{2}v = \\ = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}b\cdot v^2 = \frac{1}{4^3}b^3,$$

takže $b = \sqrt[3]{64^2}\,\mathrm{cm} = 16\,\mathrm{cm}$.

6. *Jsou dána přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = 1$ pro každé celé $x < 0$ a*

$$f(x) = 1 - f(x - a_1)\,f(x - a_2)\ldots f(x - a_n) \qquad (1)$$

pro každé celé $x \geqq 0$. Dokažte, že existují přirozená čísla s a t taková, že pro každé celé $x > s$ platí $f(x + t) = f(x)$. *(P. Kaňovský)*

Řešení. Matematickou indukcí nejprve dokážeme, že všechny hodnoty $f(x)$ leží v dvouprvkové množině $\mathsf{M} = \{0, 1\}$. Tvrzení $f(x) \in \mathsf{M}$ totiž platí pro každé $x < 0$; je-li celé číslo $x \geqq 0$ takové, že $f(y) \in \mathsf{M}$ pro každé celé $y < x$, pak v M leží každé z n čísel $f(x - a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a tedy i jejich součin, podle (1) tedy i číslo $f(x)$. Důkaz indukcí je hotov.

Označme nyní $A = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Pak všechna čísla $x - a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ leží mezi A čísly $x - 1$, $x - 2$, …, $x - A$. Podle (1) to znamená, že platí-li pro některá nezáporná čísla p a q následujících A rovností

$$f(p-1) = f(q-1),\ f(p-2) = f(q-2),\ \ldots,\ f(p-A) = f(q-A), \tag{2}$$

platí rovněž rovnost $f(p) = f(q)$; matematickou indukcí lze pak ověřit rovnost $f(p + r) = f(q + r)$ pro každé celé $r \geqq 0$. Dokážeme-li proto existenci přirozených čísel p a q, $p < q$, pro něž platí soustava rovností (2), bude tvrzení z textu úlohy platit pro čísla $s = p$ a $t = q - p$.

Podmínku (2) lze vyjádřit jako rovnost dvou uspořádaných A-tic

$$[f(p-1), f(p-2), \ldots, f(p-A)] = [f(q-1), f(q-2), \ldots, f(q-A)],$$

které jsou, jak již víme, sestaveny výhradně z čísel 0 a 1. Ze dvou různých prvků lze ale sestavit pouze 2^A různých A-tic, takže například v následující skupině A-tic

$$\big\{[f(x-1), f(x-2), \ldots, f(x-A)]\colon x = 0, 1, \ldots, 2^A\big\}$$

jsou některé dvě A-tice stejné. Tím je důkaz tvrzení úlohy hotov.