51. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácího kola kategorie A

1. *Je-li S obsah trojúhelníku o stranách a, b, c a T obsah trojúhelníku o stranách $a+b$, $b+c$, $c+a$, pak platí $T \geqq 4S$. Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.*

Řešení. Vyjádření obsahu S obecného trojúhelníku z délek jeho stran a, b, c je dáno Heronovým vzorcem

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bez označení s pro poloviční obvod je zápis Heronova vzorce poněkud delší:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}. \tag{1}$$

Udělejme malou odbočku a všimněme si, jak Heronův vzorec nepřímo „testuje“ známé nerovnosti, které zaručují existenci trojúhelníku: *Čísla a, b, c jsou délkami stran některého trojúhelníku, právě když všichni činitelé pod odmocninou ve vzorci* (1) *jsou kladní.*

Podle vzorce (1) je obsah T trojúhelníku o stranách $a+b$, $b+c$, $c+a$ roven

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(2a+2b+2c)(2c)(2a)(2c)} = \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Dokazovanou nerovnost $T \geqq 4S$ tudíž rozepíšeme jako

$$\sqrt{abc(a+b+c)} \geqq \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)};$$

v ekvivalentní nerovnosti mezi odmocňovanými výrazy zkrátíme činitel $(a+b+c)$ a dostaneme tak nerovnost

$$abc \geqq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c), \tag{2}$$

kterou nyní (pro strany a, b, c obecného trojúhelníku) několika způsoby dokážeme.

Při prvním z nich využijeme zřejmých nerovností

$$\begin{aligned} a^2 &\geqq a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c), \\ b^2 &\geqq b^2 - (c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a), \\ c^2 &\geqq c^2 - (a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b). \end{aligned} \tag{3}$$

Protože jde o tři nerovnosti mezi kladnými výrazy, součin jejich levých stran není menší než součin jejich pravých stran:

$$a^2b^2c^2 \geqq (b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2,$$

odkud po odmocnění dostaneme nerovnost (2). Tím je nerovnost $T \geqq 4S$ dokázána. Z našeho postupu rovněž plyne, že rovnost $T = 4S$ nastane, právě když budou splněny současně tři rovnosti

$$a^2 = a^2 - (b-c)^2,\ b^2 = b^2 - (c-a)^2,\ c^2 = c^2 - (a-b)^2,$$

tj. právě když bude platit $a = b = c$ (případ rovnostranného trojúhelníku).

Poznamenejme, že důkazu (2) jsme dosáhli vynásobením tří analogických nerovností (3). První z nich po odmocnění obou stran získá tvar nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (kladných) čísel $u = a + b - c$ a $v = a - b + c$:

$$a = \frac{(a+b-c) + (a-b+c)}{2} \geqq \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)},$$

Využít takovou AG-nerovnost vás možná napadne, když dokazovanou nerovnost (2) přepíšete z původních proměnných a, b, c do nových proměnných

$$u = a + b - c > 0,\ v = a - b + c > 0,\ w = -a + b + c > 0.$$

Protože $a = \frac{1}{2}(u+v)$, $b = \frac{1}{2}(u+w)$ a $z = \frac{1}{2}(v+w)$, přejde nerovnost (2) v nerovnost

$$(u+v)(u+w)(v+w) \geqq 8uvw \tag{2'}$$

a souvislost s AG-nerovnostmi

$$\frac{u+v}{2} \geqq \sqrt{uv},\ \frac{u+w}{2} \geqq \sqrt{uw},\ \frac{v+w}{2} \geqq \sqrt{vw}$$

je nasnadě. Dokázat transformovanou nerovnost (2′) můžeme ovšem i užitím jediné AG-nerovnosti: po roznásobení levé strany (2′) a zřejmé úpravě dostaneme

$$\frac{u^2v + u^2w + v^2u + v^2w + w^2u + w^2v}{6} \geqq uvw,$$

což je *AG*-nerovnost pro skupinu šesti členů

$$u^2v,\ u^2w,\ v^2u,\ v^2w,\ w^2u,\ w^2v,$$

neboť jejich geometrický průměr je roven $\sqrt[6]{u^2v \cdot u^2w \cdot v^2u \cdot v^2w \cdot w^2u \cdot w^2v} = uvw$.

Na závěr uveďme ještě jeden algebraický důkaz nerovnosti (2). S ohledem na symetrii předpokládejme, že $a \leqq \min\{b, c\}$, položme $x = b - a \geqq 0$, $y = c - a \geqq 0$ a přepišme nerovnost (2) jako nerovnost pro mnohočlen proměnné a s koeficienty závislými na x a y:

$$\begin{aligned}
&abc - (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = \\
&= a(a+x)(a+y) - (a+x+y)(a+y-x)(a+x-y) = \\
&= a[a^2 + a(x+y) + xy] - [a + (x+y)][a^2 - (x-y)^2] = \\
&= [a^3 + a^2(x+y) + axy] - [a^3 + a^2(x+y) - a(x-y)^2 - (x+y)(x-y)^2] = \\
&= a[xy + (x-y)^2] + (x+y)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

Poslední výraz je (vzhledem k tomu, že $a > 0$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$) zřejmě nezáporný, přičemž nule se rovná, právě když platí $xy = 0$ a $x - y = 0$, neboli $x = y = 0$.

2. *V oboru celých čísel x, y řešte rovnici*

$$(x_5)^2 + (y^4)_5 = 2xy^2 + 51, \tag{1}$$

kde n_5 značí násobek pěti nejbližší k číslu n, například $(-9)_5 = -10$.

Řešení. Podáme nejprve úplné řešení úlohy, avšak bez metodického komentáře, který uvedeme až v následné poznámce.

Nechť dvojice celých čísel x, y vyhovuje rovnici (1). Protože součet $(x_5)^2 + (y^4)_5$ je dělitelný pěti, dává číslo $2xy^2$ při dělení pěti zbytek 4, tj. $5 \mid (2xy^2 - 4)$. Číslo y proto není dělitelné pěti, takže platí buď $y = 5k \pm 1$, nebo $y = 5k \pm 2$, kde $5k = y_5$. Obě možnosti teď posoudíme odděleně.

Případ $y = 5k \pm 1$. Protože $y^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$, platí $5 \mid (y^2 - 1)$, a proto z podmínky $5 \mid (2xy^2 - 4)$ plyne $5 \mid (2x - 4) = 2(x - 2)$, tedy $x = 5n + 2$, kde $5n = x_5$. Z podmínky $5 \mid (y^2 - 1)$ plyne rovněž $5 \mid (y^4 - 1)$, neboli $(y^4)_5 = y^4 - 1$, tudíž rovnice (1) získává tvar

$$(5n)^2 + (y^4 - 1) = 2 \cdot (5n + 2) \cdot y^2 + 51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} (y^4 - 10ny^2 + 25n^2) - 4y^2 &= 52, \\ (y^2 - 5n)^2 - 4y^2 &= 52, \\ (y^2 - 5n - 2y)(y^2 - 5n + 2y) &= 52. \end{aligned} \tag{2}$$

Na levé straně poslední rovnice je součin dvou celých čísel lišících se o $4y$, tedy o násobek čtyř; protože $52 = 2^2 \cdot 13$, stojí na levé straně (2) součin čísel 2 a 26, nebo součin čísel -2 a -26. Tak či onak platí $|4y| = 26 - 2 = 24$, odkud $y = \pm 6$, takže *menší* z obou činitelů v (2) je roven $6^2 - 5n - 12 = 24 - 5n$. Zatímco rovnice $24 - 5n = 2$ žádné celočíselné řešení n nemá, rovnice $24 - 5n = -26$ má řešení $n = 10$, kterému odpovídá $x = 5 \cdot 10 + 2 = 52$. Podmínku $y = 5k \pm 1$ tedy splňují právě dvě řešení rovnice (1): $(x, y) = (52, 6)$ a $(x, y) = (52, -6)$.

Případ $y = 5k \pm 2$. Protože $y^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, platí $5 \mid (y^2 + 1)$, a proto z podmínky $5 \mid (2xy^2 - 4)$ plyne $5 \mid (-2x - 4) = -2(x + 2)$, tedy $x = 5n - 2$, kde $5n = x_5$. Z podmínky $5 \mid (y^2 + 1)$ plyne rovněž $5 \mid (y^4 - 1)$, neboli $(y^4)_5 = y^4 - 1$, tudíž rovnice (1) získává tvar

$$(5n)^2 + (y^4 - 1) = 2 \cdot (5n - 2) \cdot y^2 + 51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} (y^4 - 10ny^2 + 25n^2) + 4y^2 &= 52, \\ (y^2 - 5n)^2 + 4y^2 &= 52. \end{aligned} \tag{3}$$

Oba sčítanci v levé straně poslední rovnice jsou nezáporní, takže nepřevyšují číslo 52 z pravé strany. Z nerovnosti $4y^2 \leqq 52$ plyne $y^2 \leqq 13$, což s ohledem na podmínku $y = 5k \pm 2$ znamená, že buď $y = \pm 2$, nebo $y = \pm 3$. Je-li $y = \pm 2$, je rovnice (3) splněna, právě když $(4-5n)^2 = 36$, což nastane pro jediné celé číslo $n = 2$, kterému odpovídá $x = 5\cdot 2 - 2 = 8$. Je-li $y = \pm 3$, přejde (3) v rovnici $(9-5n)^2 = 16$ s jediným celočíselným kořenem $n = 1$, kterému odpovídá $x = 5 \cdot 1 - 2 = 3$. Podmínku $y = 5k \pm 2$ tedy splňují právě čtyři řešení (x, y) rovnice (1): dvojice $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$.

Odpověď. Rovnice (1) má v oboru celých čísel celkem šest řešení (x, y): dvojice $(52, 6)$, $(52, -6)$, $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$.[1]

Poznámka. Řešitelé by si měli předně uvědomit, že pro každé celé z je číslo z_5 rovno jednomu z čísel $z-2$, $z-1$, z, $z+1$ nebo $z+2$ (tomu z nich, které je násobkem pěti). Danou úlohu by bylo možné proto řešit tak, že bychom rovnici (1) posoudili v jednotlivých případech $x = 5n + r$ a $y = 5k + q$, kde čísla r a q probíhají (navzájem nezávisle) množinu $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Taková diskuse by ovšem byla zdlouhavá, výše podané řešení je jejím promyšleným zkrácením. Uvědomte si, že při našem postupu jsme nejdříve vyloučili případ $q = 0$ a poté jsme již rozlišili pouze případy $q = \pm 1$ a $q = \pm 2$. Bylo to umožněno tím, že číslo y^2 má při dělení pěti zbytek nezávislý na znaménku čísla q a že podle tohoto zbytku lze z rovnice (1) jednoznačně určit obdobný zbytek čísla x, tedy hodnotu r. Poslední „trik“, který jsme při řešení uplatnili, spočíval v tom, že jsme do rovnice (1) nedosazovali vyjádření $y = 5k \pm 1$ resp. $y = 5k \pm 2$, čímž se nám poněkud zjednodušil zápis příslušných rovnic (2) a (3). Dodejme ještě, že algebraické úpravy rovnice (1) vedoucí k rovnicím (2) a (3) patří při řešení rovnic v oboru celých čísel k těm nejobvyklejším postupům.

Řešitelům úlohy pomůžeme, když jim postupně předložíme tyto dílčí úkoly:

a) Dokažte, že číslo y z libovolného řešení (x, y) rovnice (1) není dělitelné pěti.
b) Zjistěte zbytky při dělení pěti čísel y^2 a y^4 v závislosti na zbytku čísla y.
c) Určete zbytek při dělení pěti čísla x z libovolného řešení (x, y) rovnice (1), znáte-li (nenulový) zbytek čísla y^2.

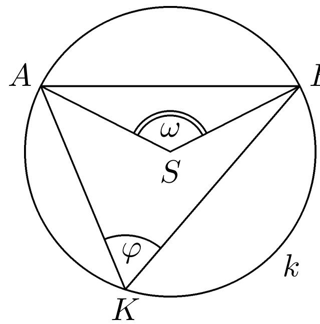
3. *V daném trojúhelníku ABC protíná osa úhlu ACB stranu AB v bodě K a kružnici opsanou v bodě L $(L \neq C)$. Označme V střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, S střed kružnice opsané trojúhelníku KBV a Z průsečík přímek AB a SL. Dokažte, že přímka SK je tečnou kružnice opsané trojúhelníku KLZ.*

Řešení. Skutečnost, že některá přímka je tečnou některé kružnice, ověřujeme často pomocí důležité planimetrické poučky o tzv. *úsekovém úhlu*, ta však nepatří k běžnému gymnaziálnímu učivu. Proto se o ní zmíníme před vlastním řešením úlohy.

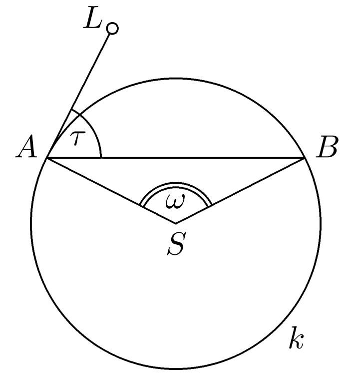
Obrázek 1a ilustruje známý školský poznatek o obvodových a středových úhlech: *Velikost ω středového úhlu ASB kružnice k je rovna dvojnásobku velikosti φ příslušného obvodového úhlu AKB.* Na obrázku 1b je kromě kružnice k o středu S a její tětivy AB nakreslena ještě úsečka LA, která svírá s tětivou AB úhel velikosti τ. Z rovnoramenného trojúhelníku ABS se základnou AB plyne, že úhel SAB má velikost $\frac{1}{2}(180° - \omega) = 90° - \frac{1}{2}\omega$, a proto úhel SAL má velikost $(90° - \frac{1}{2}\omega) + \tau$. Přímka LA je tečnou kružnice k, pokud je úhel SAL pravý, tedy pokud platí

$$\left(90° - \frac{1}{2}\omega\right) + \tau = 90°, \quad \text{neboli} \quad \omega = 2\tau.$$

[1] Doporučujeme provést zkoušku, i když není nutnou součástí takto podaného řešení.

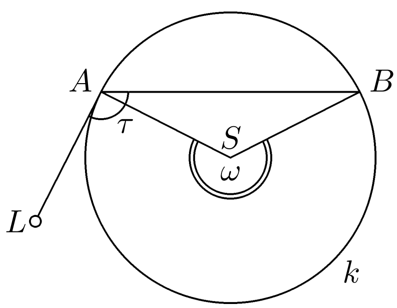


Obr. 1a

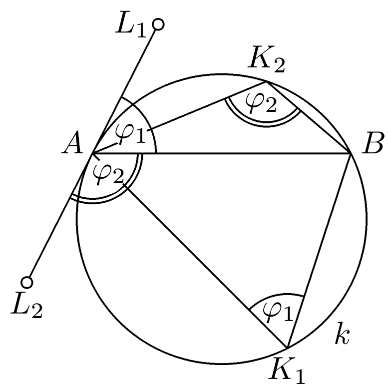


Obr. 1b

Stejná podmínka $\omega = 2\tau$ se podobně odvodí i v případě z obr. 1c, kdy středový úhel ω je větší než 180°. V obou situacích se úhel LAB mezi *úsekem* LA tečny a tětivou AB nazývá *úsekový úhel*. Jak jsme právě dokázali, *velikost* ω *středového úhlu* ASB *je rovna dvojnásobku velikosti* τ *úsekového úhlu* LAB. V důsledku uvedených vět platí tvrzení o shodnosti obvodových a úsekových úhlů, pokud tyto dva úhly vybíráme v opačných polorovinách vyťatých přímkou, na které leží dotyčná tětiva kružnice (obr. 1d). Protože velikost úsekového úhlu polohu příslušné tečny jednoznačně určuje, využijeme při řešení dané úlohy shodnost obvodového a úsekového úhlu ve formě této implikace: *Jsou-li dány tři různé body A, B, K téže kružnice k a vnitřní bod L poloroviny opačné k polorovině ABK a jsou-li úhly AKB a LAB shodné, pak přímka LA je tečnou kružnice k.*



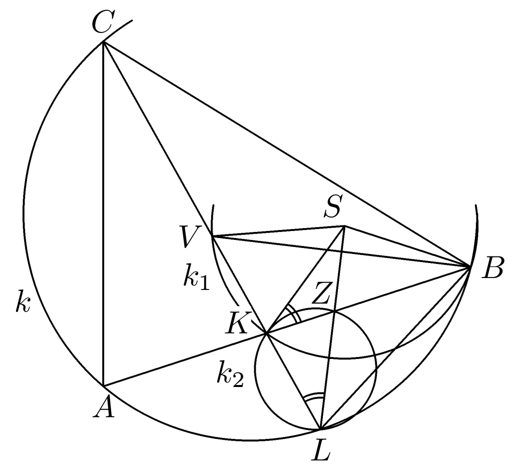
Obr. 1c



Obr. 1d

Situace z naší úlohy je znázorněna na obr. 2. Kružnice opsané trojúhelníkům ABC, KBV a KLZ jsou označeny po řadě k, k_1 a k_2. Naší úlohou je dokázat, že přímka SK je tečnou kružnice k_2; k tomu podle předchozího odstavce stačí vysvětlit, proč jsou shodné úhly SKZ a KLZ, vyznačené na obr. 2 obloučky. Kromě toho ovšem musíme zdůvodnit, proč body L a S vždy leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB (jak je tomu v případě našeho obrázku).

Střed V kružnice vepsané je vždy vnitřním bodem trojúhelníku ABC, neboť je průsečíkem os jeho vnitřních úhlů. Proto je bod V vnitřním bodem úsečky CK, za-



Obr. 2

tímco bod L leží na jejím prodloužení za bod K. Body V a L proto leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB. Označíme-li jako obvykle α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, má trojúhelník BCV u vrcholů B a C vnitřní úhly velikostí $\frac{1}{2}\beta$ a $\frac{1}{2}\gamma$, takže pro jeho vnější úhel při vrcholu V platí

$$|\sphericalangle BVK| = \frac{\beta + \gamma}{2} < 90^\circ.$$

Úhel BVK je tudíž ostrý, a proto střed S kružnice k_1 leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou BK jako bod V, což spolu s předchozím tvrzením o poloze bodů V a L znamená, že body L a S skutečně leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB, jak jsme potřebovali ověřit. Podle věty o obvodových a středových úhlech v kružnici k_1 platí

$$|\sphericalangle BSK| = 2 \cdot |\sphericalangle BVK| = \beta + \gamma,$$

z rovnoramenného trojúhelníku BKS tudíž plyne

$$|\sphericalangle SKZ| = |\sphericalangle SKB| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle BSK|) = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta - \gamma) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Zbývá nám proto dokázat, že také úhel KLZ má velikost $\frac{1}{2}\alpha$. Provedeme to dvěma nezávislými postupy.

Při prvním z nich nejprve určíme velikost úhlu LBV. Protože $|\sphericalangle LBA| = |\sphericalangle LCA| = \frac{1}{2}\gamma$ (obvodové úhly v kružnici k) a $|\sphericalangle ABV| = \frac{1}{2}\beta$, vzhledem k vzájemné poloze úseček LV a AB můžeme psát

$$|\sphericalangle LBV| = |\sphericalangle LBA| + |\sphericalangle ABV| = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Již dříve jsme zjistili, že takovou velikost má i úhel BVK (neboli úhel BVL), a tak je trojúhelník BVL rovnoramenný: $|BL| = |VL|$. Zároveň ovšem platí $|BS| = |VS|$, takže oba body L a S leží na ose úsečky BV (čtyřúhelník $BLVS$ je tedy deltoid, případně kosočtverec nebo čtverec). Odtud plyne, že úsečky BV a SL jsou navzájem kolmé, úhel KLZ je proto doplňkový k úhlu BVK:

$$|\sphericalangle KLZ| = 90^\circ - |\sphericalangle BVK| = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Při druhém způsobu určení velikosti úhlu KLZ si nejdříve všimneme, že platí $|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle BLC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ (obvodové úhly v kružnici k), což spolu s dříve odvozenou rovností $|\sphericalangle BSK| = \beta + \gamma$ znamená, že ve čtyřúhelníku $BLKS$ je součet vnitřních úhlů u protějších vrcholů L a S roven 180°, jedná se proto o čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici. V ní jsou KBS a KLS shodné obvodové úhly nad tětivou KS, a proto platí

$$|\sphericalangle KLZ| = |\sphericalangle KLS| = |\sphericalangle KBS| = \tfrac{1}{2}\alpha$$

(připomínáme, že BKS je rovnoramenný trojúhelník s úhly $\frac{1}{2}\alpha$ při základně BK).

4. *Nechť $n \geqq 2$ je dané přirozené číslo. Pro které hodnoty reálného parametru p má soustava rovnic*

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{2}{x_1^2} &= px_2,\\ x_2^4 + \frac{2}{x_2^2} &= px_3,\\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots,\\ x_{n-1}^4 + \frac{2}{x_{n-1}^2} &= px_n,\\ x_n^4 + \frac{2}{x_n^2} &= px_1 \end{aligned} \tag{1}$$

alespoň dvě řešení v oboru reálných čísel?

Řešení. Protože daná soustava (1) je velmi složitá a patrně neexistuje postup, jak v konečném algebraickém tvaru vyjádřit všechna její řešení, budeme jednak přemýšlet o podmínkách řešitelnosti této soustavy, jednak hledat některá její speciální řešení.

Všimněme si nejdříve, že soustava (1) nemá žádné řešení pro hodnotu $p = 0$, protože hodnoty levých stran rovnic jsou kladná čísla. Také druhé zjištění, které nyní uvedeme, je zřejmé: n-tice čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je řešením soustavy (1) s hodnotou parametru p, právě když n-tice opačných čísel $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ je řešením soustavy (1) s opačnou hodnotou parametru $-p$. Hodnoty levých i pravých stran všech rovnic soustavy se totiž při změně všech hodnot $x_i \mapsto -x_i$ a $p \mapsto -p$ nezmění, protože pro libovolná $x \neq 0$ a p platí

$$(-x)^4 + \frac{2}{(-x)^2} = x^4 + \frac{2}{x^2} \quad \text{a} \quad (-p)(-x) = px.$$

Soustava (1) s hodnotou parametru p má tedy právě tolik řešení, kolik jich má soustava (1) s hodnotou parametru $-p$. Budeme proto hledat pouze všechna *kladná* čísla p, pro která má soustava (1) aspoň dvě řešení (a v odpovědi k nim připojíme všechna opačná čísla $-p$.)

Až do závěru řešení budeme tedy uvažovat jen kladné hodnoty parametru p soustavy (1). Z kladnosti jejích levých stran plyne, že také všechny pravé strany px_i musí být kladné, a proto (s ohledem na předpoklad $p > 0$) musí platit $x_i > 0$ pro každé i. Libovolné řešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soustavy (1) je tedy sestaveno z n kladných čísel.

Předpokládejme nyní, že pro dané $p > 0$ nějaké řešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soustavy (1) existuje, a všech n rovnic mezi sebou vynásobme. Pro kladná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ tak dostaneme rovnost

$$\left(x_1^4 + \frac{2}{x_1^2}\right)\left(x_2^4 + \frac{2}{x_2^2}\right)\dots\left(x_n^4 + \frac{2}{x_n^2}\right) = p^n x_1 x_2 \dots x_n. \tag{2}$$

Každý činitel na levé straně odhadneme zdola podle známé nerovnosti

$$u + v \geqq 2\sqrt{uv},$$

která platí pro libovolná kladná čísla u a v, přičemž rovnost nastane, právě když $u = v$ (je to v podstatě nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel u a v, plynoucí snadno ze zřejmé nerovnosti $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geqq 0$). Proto pro každý index i platí

$$x_i^4 + \frac{2}{x_i^2} \geqq 2\sqrt{x_i^4 \cdot \frac{2}{x_i^2}} = |x_i| \cdot 2\sqrt{2} = x_i \cdot 2\sqrt{2}. \tag{3}$$

Důsledkem rovnosti (2) je tudíž nerovnost

$$\left(x_1 2\sqrt{2}\right)\left(x_2 2\sqrt{2}\right)\dots\left(x_n 2\sqrt{2}\right) \leqq p^n x_1 x_2 \dots x_n, \tag{4}$$

ze které po krácení (kladným) součinem $x_1 x_2 \dots x_n$ dostaneme podmínku na číslo p ve tvaru

$$p^n \geqq (2\sqrt{2})^n, \quad \text{neboli} \quad p \geqq 2\sqrt{2}.$$

Zformulujme, co jsme právě zjistili: *má-li soustava* (1) *pro pevné* $p > 0$ *alespoň jedno řešení, pak pro toto číslo* p *platí odhad* $p \geqq 2\sqrt{2}$.

Pro „krajní“ hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ nyní soustavu (1) úplně vyřešíme, tj. najdeme *všechna* její řešení. Je-li $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ libovolné řešení soustavy (1) s hodnotou $p = 2\sqrt{2}$, pak podle úvah z předchozího odstavce nastane v nerovnosti (4) rovnost, což je možné jedině tak, že rovnosti nastanou ve všech násobených nerovnostech (3). Proto tehdy pro každý index i platí

$$x_i^4 = \frac{2}{x_i^2}, \quad \text{neboli} \quad x_i^6 = 2, \quad \text{tj.} \quad x_i = \sqrt[6]{2}.$$

Pro hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ má tedy soustava (1) jediné (!) řešení

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{2}, \dots, \sqrt[6]{2}\right).$$

Z výsledků předchozích dvou odstavců plyne: *má-li soustava* (1) *pro pevné* $p > 0$ *alespoň dvě řešení, pak pro toto číslo* p *platí ostrá nerovnost* $p > 2\sqrt{2}$. Najdeme-li proto dvě řešení soustavy (1) s libovolnou hodnotou parametru $p > 2\sqrt{2}$, budeme znát odpověď na otázku ze zadání úlohy. Zmíněná dvě řešení budeme hledat mezi n-ticemi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ složenými z n stejných čísel; taková n-tice $(x, x, \ldots, x)$ je zřejmě řešením soustavy (1), právě když je číslo x řešením (jediné) rovnice

$$x^4 + \frac{2}{x^2} = px, \quad \text{neboli} \quad x^6 - px^3 + 2 = 0.$$

Poslední rovnice je kvadratická vzhledem k neznámé $y = x^3$ a má v oboru reálných čísel y dvě různá řešení

$$y_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 8}}{2}$$

pro každou z námi uvažovaných hodnot $p > 2\sqrt{2}$, neboť pro ně platí $p^2 - 8 > 0$. Pro každé takové p má tedy původní soustava (1) dvě řešení

$$(x_1, \ldots, x_n) = (\sqrt[3]{y_1}, \ldots, \sqrt[3]{y_1}) \quad \text{a} \quad (x_1, \ldots, x_n) = (\sqrt[3]{y_2}, \ldots, \sqrt[3]{y_2}).$$

(Nevylučujeme, že kromě těchto řešení tehdy existují i řešení jiná, totiž taková, že $x_i \neq x_j$ pro některá $i \neq j$.)

Odpověď. Všechny hledané hodnoty p tvoří množinu $\big(-\infty; -2\sqrt{2}\big) \cup \big(2\sqrt{2}; \infty\big)$.

5. *Najděte všechny mnohočleny* $P(x)$ *s reálnými koeficienty, které pro každé reálné číslo* x *splňují rovnost*

$$(x+1)\,P(x-1) + (x-1)\,P(x+1) = 2x\,P(x). \tag{1}$$

Řešení. Dvěma odlišnými postupy ukážeme, že vyhovující mnohočleny jsou právě mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a a d jsou libovolná reálná čísla. Při prvním postupu uplatníme metodu, která je užitečná i při řešení mnoha jiných úloh o mnohočlenech; říká se jí *metoda neurčitých koeficientů*. Jako obvykle budeme členy mnohočlenů zapisovat v sestupném pořadí podle mocnin proměnné x; pomocí prvních koeficientů hledaného mnohočlenu

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \ldots \tag{2}$$

vyjádříme první koeficienty obou stran rovnice (1) a pak je porovnáme. Zápisem (2) jsme naznačili, že budeme skutečně počítat s prvními *čtyřmi* koeficienty mnohočlenu $P(x)$. Ukáže se totiž, že výpočty s *menším počtem* koeficientů k vyřešení úlohy nestačí. Abychom pro mnohočleny stupně nejvýše 3 nemuseli provádět další samostatné výpočty, nebudeme prozatím předpokládat, že koeficient a u mocniny x^n v zápisu (2) je různý od nuly.

Najdeme nejdříve první členy mnohočlenu $P(x-1)$:

$$\begin{aligned}P(x-1) &= a(x-1)^n + b(x-1)^{n-1} + c(x-1)^{n-2} + d(x-1)^{n-3} + \ldots = \\ &= a\bigl(x^n - \tbinom{n}{1}x^{n-1} + \tbinom{n}{2}x^{n-2} - \tbinom{n}{3}x^{n-3} + \ldots\bigr) + \\ &\quad + b\bigl(x^{n-1} - \tbinom{n-1}{1}x^{n-2} + \tbinom{n-1}{2}x^{n-3} - \ldots\bigr) + \\ &\quad + c\bigl(x^{n-2} - \tbinom{n-2}{1}x^{n-3} + \ldots\bigr) + d\bigl(x^{n-3} - \ldots\bigr) + \ldots = \\ &= ax^n + \bigl[-\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a - \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \\ &\quad + \bigl[-\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b - \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-3} + \ldots\end{aligned}$$

Obdobným výpočtem zjistíme, že

$$\begin{aligned}P(x+1) = ax^n &+ \bigl[\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a + \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \\ &+ \bigl[\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b + \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-3} + \ldots\end{aligned}$$

Nyní můžeme určit první členy mnohočlenu $(x+1)P(x-1)+(x-1)P(x+1)$, totiž členy s mocninami x^{n+1}, x^n, x^{n-1} a x^{n-2} (vypsali jsme je předem, abychom při následujícím výpočtu zbytečně nevypisovali členy s nižšími mocninami x):

$$\begin{aligned}&(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) = \\ &= xP(x-1) + P(x-1) + xP(x+1) - P(x+1) = \\ &= ax^{n+1} + \bigl[-\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^n + \bigl[\tbinom{n}{2}a - \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-1} + \\ &\quad + \bigl[-\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b - \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-2} + \ldots + \\ &\quad + ax^n + \bigl[-\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a - \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \ldots + \\ &\quad + ax^{n+1} + \bigl[\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^n + \bigl[\tbinom{n}{2}a + \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-1} + \\ &\quad + \bigl[\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b + \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-2} + \ldots - \\ &\quad - ax^n - \bigl[\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} - \bigl[\tbinom{n}{2}a + \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} - \ldots = \\ &= 2ax^{n+1} + 2bx^n + \bigl[2\tbinom{n}{2}a - 2\tbinom{n}{1}a + 2c\bigr]x^{n-1} + \\ &\quad + \bigl[2\tbinom{n-1}{2}b - 2\tbinom{n-1}{1}b + 2d\bigr]x^{n-2} + \ldots\end{aligned}$$

Našli jsme první členy levé strany rovnice (1). Vypsat první členy její pravé strany je snadné:

$$2xP(x) = 2ax^{n+1} + 2bx^n + 2cx^{n-1} + 2dx^{n-2} + \ldots$$

Vidíme, že první dva členové levé strany se shodují s prvními dvěma členy pravé strany, ať je mnohočlen $P(x)$ vybrán jakkoliv. Třetí a čtvrté členy se již obecně neshodují a jejich rovnosti jsou vyjádřeny podmínkami

$$2\tbinom{n}{2}a - 2\tbinom{n}{1}a + 2c = 2c \quad \text{a} \quad 2\tbinom{n-1}{2}b - 2\tbinom{n-1}{1}b + 2d = 2d,$$

ze kterých po rozepsání kombinačních čísel dostaneme rovnice tvaru $n(n-3)a = 0$ a $(n-1)(n-4)b = 0$.[2] V případě $n > 3$ tedy musí platit $a = 0$, což znamená, že se

[2] Všimněte si, že rovnice pro koeficient b se liší od rovnice pro koeficient a pouze tím, že je v ní číslo n zaměněno číslem $n-1$. Koeficient b totiž převezme roli „vedoucího“ koeficientu a, když v zápise (2) vynecháme první člen součtu (čímž snížíme stupeň n o jedničku).

můžeme omezit pouze na případ $n = 3$. Tehdy je první rovnice splněna pro každé $a \in \mathbb{R}$, zatímco z druhé rovnice pak plyne $b = 0$. Hledaný mnohočlen $P(x)$ je proto nutně tvaru

$$P(x) = ax^3 + cx + d \tag{3}$$

a po dosazení libovolného takového mnohočlenu do obou stran rovnice (1) dostaneme dva mnohočleny, které se shodují v prvních členech s mocninami x^4, x^3, x^2 a x^1. Zbývá tedy porovnat poslední (absolutní) členy obou mnohočlenů

$$(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) \quad \text{a} \quad 2xP(x).$$

Místo algebraického výpočtu[3] využijeme obvyklý obrat, který je založen na tomto zřejmém tvrzení: *absolutní člen mnohočlenu p je jeho hodnota $p(0)$ v bodě* 0. V našem případě proto zjistíme, kdy platí rovnost $P(-1) - P(1) = 0 \cdot P(0)$, tedy podle (3)

$$(-a - c + d) - (a + c + d) = 0.$$

Je to zřejmě právě tehdy, když $c = -a$. Proto jsou řešeními úlohy právě mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a, d jsou libovolná reálná čísla.

Nyní podáme DRUHÉ ŘEŠENÍ úlohy postupem, který využíváme při řešení funkcionálních rovnic. Získáváme při něm významné informace o neznámých funkcích tak, že do rovnic, které hledané funkce splňují, opakovaně *dosazujeme vhodně vybrané hodnoty* proměnných.[4] Nechť je tedy $P(x)$ libovolný mnohočlen splňující v proměnné $x \in \mathbb{R}$ rovnici (1). Dosadíme-li do ní nejprve hodnotu $x = 1$ a pak hodnotu $x = -1$, dostaneme rovnosti

$$2 \cdot P(0) + 0 \cdot P(2) = 2 \cdot P(1) \quad \text{a} \quad 0 \cdot P(-2) - 2 \cdot P(0) = -2 \cdot P(-1),$$

ze kterých plyne, že $P(1) = P(0) = P(-1)$. Označíme-li proto $P(0) = d$, má rovnice $P(x) = d$ kořeny $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$. Existuje tudíž mnohočlen $Q(x)$ takový, že $P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x) + d$. Toto vyjádření dosadíme do rovnice (1), abychom zjistili, jaké podmínky musí splňovat mnohočlen $Q(x)$ a koeficient d:

$$\begin{aligned}(x+1)x(x-1)(x-2)Q(x-1) + d(x+1) &+ \\ +(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1) + d(x-1) &= \\ &= 2x^2(x-1)(x+1)Q(x) + 2dx.\end{aligned}$$

Členy s koeficientem d se v poslední rovnici navzájem zruší a zbylé členy je možné zkrátit společným činitelem $x(x-1)(x+1)$. Získáme tak rovnici

$$(x-2)Q(x-1) + (x+2)Q(x+1) = 2xQ(x) \tag{4}$$

---

[3] Doporučujeme provést takový výpočet na závěr řešení jako *přímou zkoušku.*

[4] To jsme ostatně učinili již v závěru „algebraického“ řešení, kdy k určení absolutního členu jsme do mnohočlenu dosadili hodnotu $x = 0$.

pro neznámý mnohočlen $Q(x)$. Ze způsobu odvození plyne, že rovnice (4) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, které je různé od 0, 1 a -1; protože však obě strany (4) jsou mnohočleny proměnné x, které mají stejnou hodnotu pro nekonečně mnoho čísel x, musí jít o mnohočleny totožné, a proto rovnost (4) platí i pro $x \in \{0, 1, -1\}$.

Protože $a(x-2) + a(x+2) = 2ax$, rovnici (4) splňuje každý konstantní mnohočlen $Q(x) = a$. Původní rovnici (1) proto vyhovuje každý mnohočlen

$$P(x) = x(x-1)(x+1)a + d = ax^3 - ax + d \quad (a, d \in \mathbb{R}).$$

Jiné vyhovující mnohočleny $P(x)$ neexistují, pokud ukážeme, že *každý mnohočlen $Q(x)$ splňující rovnici (4) je konstantní.* Nechť je tedy $Q(x)$ libovolný takový mnohočlen; označme $Q(2) = a$ a dosaďme do rovnice (4) hodnotu $x = 2$. Dostaneme

$$0 \cdot Q(1) + 4Q(3) = 4Q(2), \quad \text{odkud} \quad Q(3) = Q(2) = a.$$

Nyní volbou $x = 3$ v rovnici (4) získáme rovnost

$$Q(2) + 5Q(4) = 6Q(3), \quad \text{odkud} \quad Q(4) = \frac{6Q(3) - Q(2)}{5} = \frac{6a - a}{5} = a.$$

Dále volbou $x = 4$ zjistíme, že $Q(5) = a$, atd. Dokažme proto indukcí, že $Q(n) = a$ pro každé celé $n \geqq 2$. Platí-li pro nějaké n rovnosti $Q(n) = Q(n+1) = a$ (jak je tomu pro $n = 2$), pak volbou $x = n + 1$ v rovnici (4) dostaneme

$$Q(n+2) = \frac{2(n+1)Q(n+1) - (n-1)Q(n)}{n+3} = \frac{2(n+1)a - (n-1)a}{n+3} = a.$$

Důkaz indukcí je hotov. Zjistili jsme, že rovnost $Q(x) = a$ platí pro nekonečně mnoho čísel x, což je možné, jedině když $Q(x) = a$ pro každé x (kdyby byl $Q(x)$ mnohočlen některého stupně $N > 0$, měla by rovnice $Q(x) = a$ nejvýše N kořenů). Celé řešení je tím ukončeno.

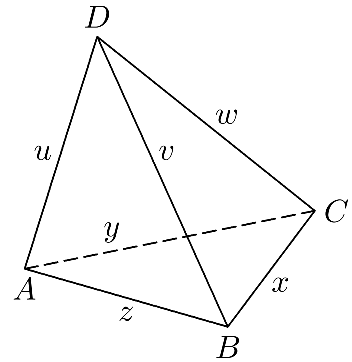
6. *Najděte všechny čtyřstěny, které mají síť tvaru deltoidu a právě čtyři hrany dané délky a. (Deltoidem rozumíme konvexní čtyřúhelník souměrný podle jediné ze svých úhlopříček; nepatří k nim tedy ani čtverec, ani kosočtverec.)*

Řešení. V první (podstatnější) části řešení najdeme všechny čtyřstěny, které mají síť tvaru deltoidu; poté již poměrně snadno zjistíme, které z nalezených čtyřstěnů mají právě čtyři shodné hrany.

Uvažujme proto libovolný čtyřstěn $ABCD$ a popišme délky jeho hran písmeny x, y, z, u, v, w podle obr. 3. Všechny sítě čtyřstěnu $ABCD$ rozdělíme do dvou skupin. Do první z nich zařadíme ty sítě, v nichž některá stěna čtyřstěnu sousedí s třemi ostatními stěnami;

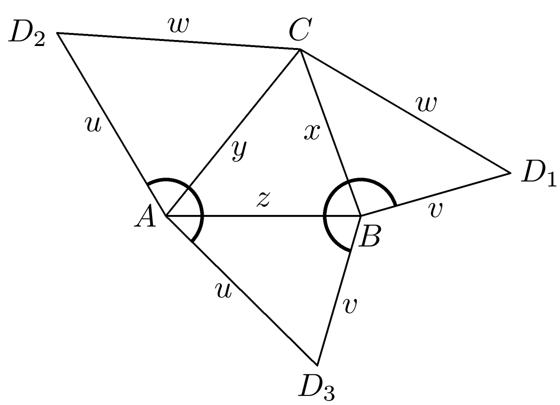
do druhé skupiny budou patřit ostatní sítě, v nichž každá stěna sousedí s nejvýše dvěma stěnami. Protože jsme označení vrcholů čtyřstěnu předem nijak neupřesnili, budeme dále uvažovat jen po jedné síti z každé z obou skupin, totiž sítě znázorněné na obr. 4 a 5. Zabývejme se každou z nich samostatně.

Síť na obr. 4 je (obecně vzato) šestiúhelníkem $AD_3BD_1CD_2$, o čtyřúhelník půjde jedině tehdy, když dva z jeho úhlů u vrcholů A, B, C budou přímé (tj. budou mít velikost 180°). Je totiž jasné, že přímý úhel nemůže být u žádného z vrcholů D_1, D_2, D_3. S ohledem na již zmíněnou libovůli značení předpokládejme, že přímé jsou úhly D_2AD_3 a D_3BD_1 (vyznačené na obr. 4). Naše síť je tehdy čtyřúhelníkem $D_2D_3D_1C$, jehož strany mají (v pořadí, v jakém za sebou cyklicky následují) délky $2u$, $2v$, w a w. Je-li tento čtyřúhelník deltoid (a ne kosočtverec), musí zřejmě platit $u = v$ a $2u \neq w$ (obr. 6a). Z osové souměrnosti podle přímky D_3C pak zjišťujeme, že platí $y = x$; čtyřstěn s „deltoidní" sítí z obr. 6a vidíte na obr. 6b. Je to čtyřstěn souměrný podle roviny souměrnosti hrany AB. Dodejme, že kromě nerovnosti $2u \neq w$ musí platit rovněž nerovnost $z < w$, která plyne z vlastnosti střední příčky AB trojúhelníku $D_1D_2D_3$ a trojúhelníkové nerovnosti pro rovnoramenný trojúhelník CD_1D_2:

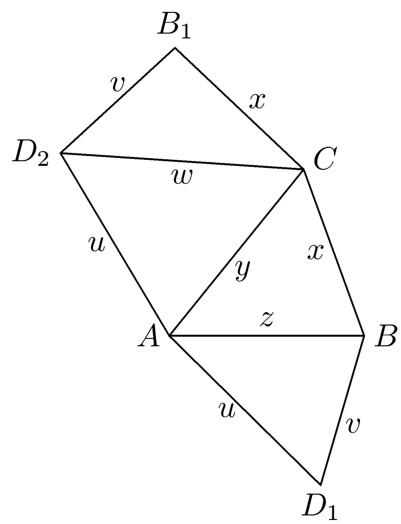


Obr. 3

$$2z = 2|AB| = |D_1D_2| < |D_1C| + |D_2C| = 2w.$$



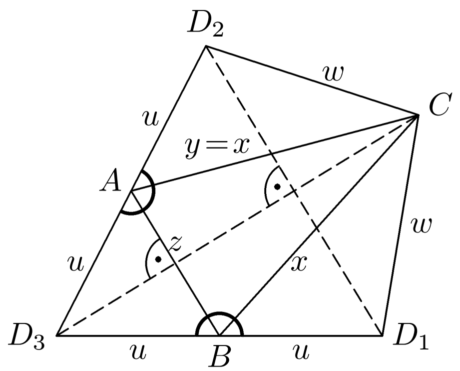
Obr. 4



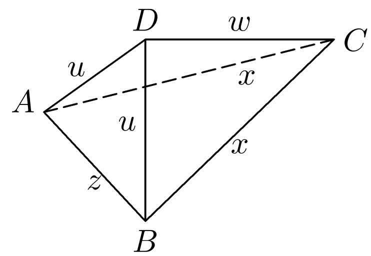
Obr. 5

Síť z obr. 5 je (obecně vzato) šestiúhelníkem $AD_1BCB_1D_2$, o čtyřúhelník půjde jen v těch případech, kdy právě dva z jeho úhlů při vrcholech A, B, C, D_2 budou přímé (takové totiž nemohou být úhly při vrcholech D_1 a B_1). S ohledem na libovůli značení stačí uvažovat jen tři následující případy.

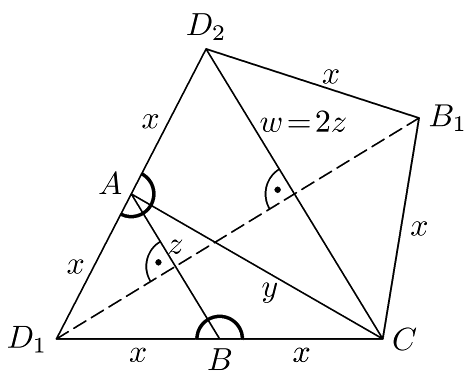
a) *Přímé úhly u vrcholů A a D_2.* Síť je čtyřúhelník B_1D_1BC, jehož strany mají v pořadí délky $2u+v$, v, x, x. Zřejmě nejde o deltoid, neboť $2u+v \neq v$.
b) *Přímé úhly u vrcholů A a C.* Síť je čtyřúhelník $D_2D_1BB_1$, jehož strany mají v pořadí délky $2u$, v, $2x$, v. Protože dvojice protějších stran má tutéž délku v, nejde o deltoid.
c) *Přímé úhly u vrcholů A a B.* Síť je čtyřúhelník $D_2D_1CB_1$, jehož strany mají v pořadí délky $2u$, $x+v$, x, v. Jde-li o deltoid, pak s ohledem na nerovnost $x+v > x$ musí platit $2u = x+v$ a $x = v$, tedy $x = u = v$. V trojúhelníku D_2D_1C je úsečka AB střední příčkou (obr. 7a), takže platí $w = |D_2C| = 2|AB| = 2z$. Příslušný čtyřstěn vidíte na obr. 7b.



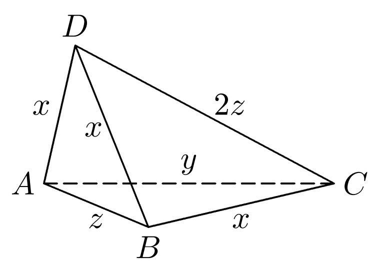
Obr. 6a



Obr. 6b



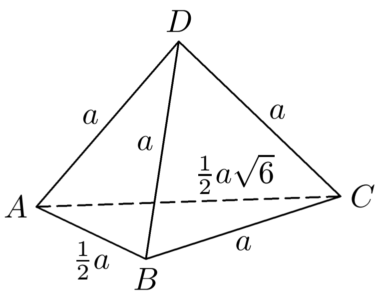
Obr. 7a



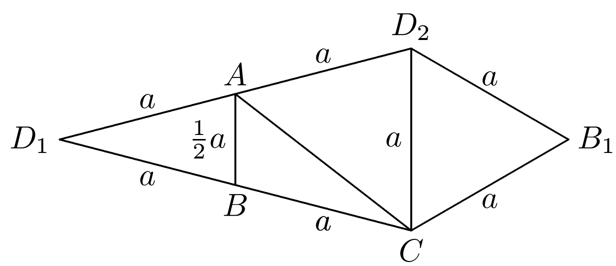
Obr. 7b

Shrňme výsledky našich dosavadních úvah: Pouze dva typy čtyřstěnů (obr. 6b a 7b) mají síť tvaru deltoidu. Naším úkolem je nyní zjistit, kdy tyto čtyřstěny mají právě čtyři shodné hrany (dané délky a). Zabývejme se nejdříve čtyřstěnem z obr. 6b, jehož hrany mají délky x, x, z, u, u, w. Předpokládejme tedy, že právě čtyři z nich jsou rovny a, které to jsou? Předně musí platit $x = a$, jinak by muselo platit $a = z = u = w$, což je ale ve sporu s nerovností $z < w$, odvozenou výše. Protože jsou vyloučeny i rovnosti $z = u$ a $u = w$ (v obou případech by délku a mělo *pět* hran čtyřstěnu $ABCD$), musí platit $u = a$. V případě $x = u$ je ovšem čtyřúhelník AD_3BC kosočtverec;

z rovnoběžnosti přímek AC a D_3B plyne rovnost souhlasných úhlů CAD_2 a BD_3A. Rovnoramenné trojúhelníky CAD_2 a BD_3A jsou tehdy shodné podle věty *sus*, takže $|D_2C| = |AB|$, neboli $z = w$, což je opět spor.[5] *Žádný čtyřstěn z obr. 6b proto není řešením naší úlohy.* Přejděme nyní k druhému typu čtyřstěnů a předpokládejme, že právě čtyři z hran některého čtyřstěnu $ABCD$ z obr. 7b mají délku a. Protože tři jeho hrany mají délku x, musí platit $x = a$; která (jediná) z ostatních délek y, z, $2z$ je rovna a? V síti na obr. 7a z trojúhelníku B_1CD_2 plyne $x + x > 2z$, tedy $x > z$. V téže síti má trojúhelník ABC tupý vnitřní úhel u vrcholu B, neboť jeho vnější úhel ABD_1 je vnitřním úhlem při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABD_1, takže je nutně ostrý. Proto je nejdelší stranou trojúhelníku ABC strana AC, což zapíšeme takto: $y > \max\{x, z\}$. Dohromady dostáváme $y > x > z$, s ohledem na rovnost $x = a$ proto nezbývá, než aby platilo $2z = a$. Nalezenými podmínkami je již čtyřstěn $ABCD$ jednoznačně (až na shodnost) určen. Délku y poslední hrany AC vypočteme jako těžnici ke straně D_1D_2 trojúhelníku CD_1D_2 o stranách $2a$, $2a$, a. Vyjde nám $y = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$. *Řešením naší úlohy je jediný čtyřstěn z obr. 8a, jeho síť tvaru deltoidu je na obr. 8b.*



Obr. 8a



Obr. 8b

Odpověď. Hledaný čtyřstěn je jediný: jeho tři hrany délky a vycházejí z jednoho vrcholu, hrany protilehlé stěny mají délku a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$. Jedna ze sítí tohoto čtyřstěnu má tvar deltoidu o stranách a, a, $2a$, $2a$.[6]

[5] V případě $w = z$ má „deltoidní“ síť z obr. 6a přímý úhel u vrcholu C, takže nejde o deltoid, ale o trojúhelník.

[6] Doporučujeme řešitelům, aby takový deltoid vystřihli z papíru a pak model čtyřstěnu složili.