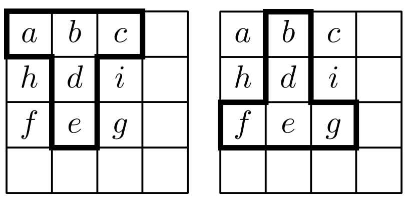
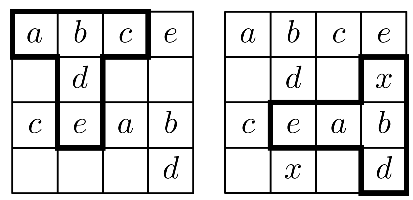
Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Do tabulky* 4×4 *jsou vepsána kladná reálná čísla tak, že součin v každé pětici tvaru* *je rovný* 1. *Zjistěte maximální počet různých čísel zapsaných v tabulce.*

Řešení. Označme a, b, c, d, e, f, g, h, i čísla vepsaná do levého horního čtverce 3×3 tabulky (obr. 1). Porovnáme-li součiny pro pětice tvaru a umístěné v této části tabulky, musí platit $abcde = bdefg$, neboli $ac = fg$. Analogicky pro pětice a nám vyjde $ahfdi = cigdh$, neboli $af = cg$. Protože jde vesměs o kladná čísla, plyne z obou rovností $f = c$ a $g = a$. Zároveň si uvědomme, že tuto vlastnost (tj. rovnost čísel v protějších rozích čtverce 3×3) musí mít každý ze čtyř takových čtverců, které v tabulce existují. To využijeme při dalším doplňování dané tabulky.

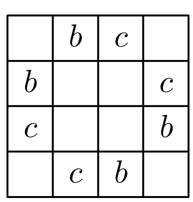


Obr. 1

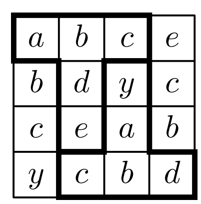


Obr. 2

Uvažujme opět umístění v levém horním rohu dané tabulky s vepsanými čísly a, b, c, d, e, doplňme další čísla podle právě dokázané vlastnosti a označme x chybějící číslo v pětici (obr. 2). Porovnáním obou shodných součinů dostáváme $abcde = abdex$, neboli $x = c$. Kdybychom stejnou úvahu udělali pro pětice polí a , jež dostaneme z uvažovaných pětic překlopením podle svislé osy dané tabulky, vyjde nám analogická rovnost i pro další dvě dvojice polí tabulky (obr. 3).



Obr. 3



Obr. 4

Teď už máme tabulku vyplněnou celou až na dvě políčka, do kterých vepíšeme číslo y (obr. 4). Porovnáním součinů v obou vyznačených pěticích dostáváme $abcde = abcdy$, neboli $y = e$. Analogická rovnost musí ovšem platit i pro druhá dvě centrální pole tabulky ležící na druhé úhlopříčce, tj. $d = a$. Stačí, abychom celou úvahu zopakovali pro pětice polí, jež vzniknou z uvažovaných pětic překlopením podle svislé osy dané tabulky.

Všimněme si teď ve vyplněné tabulce pětic polí vyznačených na obr. 5. Zřejmě musí platit $a^2bce = abce^2$, neboli $a = e$. Vidíme, že tabulka obsahuje nejvýše tři různá čísla a, b, c (obr. 6), přičemž $a^3bc = 1$. Nyní zbývá ověřit, že stejný součin a^3bc má každá pětice polí tvaru , kterou lze do tabulky umístit. Protože vyplněná tabulka je osově souměrná podle obou úhlopříček, a tedy i středově souměrná, stačí to ověřit jen pro čtyři možné polohy stejně orientovaných pětic (např. v obvyklé poloze písmene T).

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

Obr. 5

a	b	c	a
b	a	a	c
c	a	a	b
a	c	b	a

Obr. 6

Odpověď. V tabulce jsou zapsána nejvýše tři různá kladná čísla a, b, c, přičemž $a^3bc = 1$.

2. *Určete, kolik čísel můžeme vybrat z množiny* $\{1, 2, 3, \ldots, 75\,599, 75\,600\}$ *tak, aby mezi nimi bylo číslo 75 600 a aby pro libovolná dvě vybraná čísla a, b platilo, že a je dělitelem b nebo b dělitelem a. (Uveďte všechny možnosti.)*

Řešení. Uvažujme množinu M, která splňuje podmínky ze zadání. Protože M obsahuje číslo 75 600, musí být aspoň jednoprvková. Dále si všimněme, že pokud z množiny M odstraníme nějaké číslo $a \neq 75\,600$, dostaneme množinu $\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}$, která rovněž splňuje dané podmínky. Ověřme to. Množina M' i nadále obsahuje číslo 75 600. Jsou-li x, y libovolná dvě čísla z množiny M', platí pro ně automaticky, že $x \mid y$ nebo $y \mid x$, protože to pro ně platí jako pro prvky množiny M.

Tím jsme vlastně dokázali, že pokud najdeme množinu, která má m prvků a splňuje podmínky zadání, pak existuje k-prvková množina požadovaných vlastností pro libovolné k, $1 \leqq k \leqq m$. Stačí tedy najít vyhovující množinu, která má maximální možný počet prvků.

Je-li a libovolný prvek množiny M, je především $a \leqq 75\,600$. Pokud $a < 75\,600$, musí podle zadání platit, že $a \mid 75\,600$. Množina M tedy obsahuje jen dělitele čísla 75 600.

Prvočíselný rozklad čísla 75 600 je $75\,600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Každý dělitel čísla 75 600 má tedy tvar $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$, kde $0 \leqq \alpha \leqq 4$, $0 \leqq \beta \leqq 3$, $0 \leqq \gamma \leqq 2$, $0 \leqq \delta \leqq 1$. Každý prvek M je proto charakterizován uspořádanou čtveřicí $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ odpovídajících exponentů v uvedeném rozkladu na prvočinitele. Jsou-li p a p' dva různé prvky M a platí-li například $p < p'$, pak podle zadání musí současně platit $\alpha \leqq \alpha'$, $\beta \leqq \beta'$, $\gamma \leqq \gamma'$, $\delta \leqq \delta'$, přičemž aspoň jedna nerovnost musí být ostrá (jinak by platilo $p = p'$), odkud plyne nerovnost $\alpha + \beta + \gamma + \delta < \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$. Protože v našem případě je $0 \leqq \alpha + \beta + \gamma + \delta \leqq 10$, může množina M obsahovat nejvýše 11 prvků. Takovou je např. množina

$$\mathsf{D} = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^4 \cdot 3, 2^4 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7\}.$$

Tím jsme dokázali, že z dané množiny můžeme (včetně čísla 75 600) vybrat požadovaným způsobem $1, 2, \ldots, 11$ prvků.

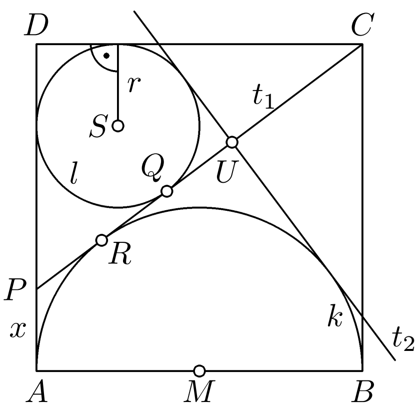
3. *Nechť k je polokružnice sestrojená nad průměrem AB, která leží ve čtverci $ABCD$. Uvažujme její tečnu t_1 z bodu C (různou od BC) a označme P její průsečík se stranou AD. Nechť t_2 je společná vnější tečna polokružnice k a kružnice vepsané trojúhelníku CDP (různá od AD). Dokažte, že přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé.*

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že délka strany čtverce $ABCD$ je 1. Označme M střed strany AB a U průsečík přímek t_1, t_2 (obr. 7). Dále označme l kružnici vepsanou trojúhelníku CDP, S její střed a r poloměr. Dále nechť Q a R jsou postupně dotykové body přímky t_1 s kružnicí l a polokružnicí k. Položme $x = |AP|$. V řešení využijeme známý fakt, že vzdálenosti obou dotykových bodů od průsečíku tečen jsou stejné. Takto například dostáváme

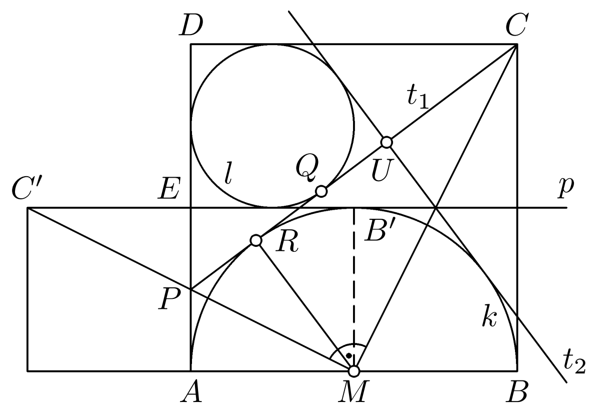
$$|CP| = |CR| + |RP| = |CB| + |AP| = 1 + x. \qquad (*)$$

Řešení provedeme ve třech krocích, přitom každý z nich vyplníme více způsoby:

1. krok. Výpočet délky x.
2. krok. Výpočet poloměru r.
3. krok. Důkaz kolmosti přímek t_1 a t_2.



Obr. 7



Obr. 8

1. krok, 1. způsob.

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník CDP. Délka jeho přepony se podle $(*)$ rovná $1+x$ a délky odvěsen jsou 1 a $1-x$ Z *Pythagorovy věty* tedy dostáváme

$$(1+x)^2 = 1^2 + (1-x)^2.$$

Řešením této (po úpravě lineární) rovnice je $x = \frac{1}{4}$.

1. krok, 2. způsob.

Označme C' bod, který vznikne otočením bodu C okolo středu M o $90°$ v kladném směru. Potom bod C' leží na přímce p, která je obrazem přímky BC v uvedeném otočení (obr. 8), přičemž rovnoběžné úsečky $C'E$ a AM mají tutéž délku $\frac{1}{2}$. Protože přímka MP je osou úhlu AMR a přímka MC osou úhlu BMR, jsou přímky MP a MC navzájem kolmé, takže bod C' leží na přímce MP. Trojúhelníky PAM' a PEC' jsou tedy souměrně sdružené podle středu P, a proto $x = |AP| = \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{4}$.

2. krok, 1. způsob.

Je-li ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku se stranami a, b, c, je jeho obsah roven $\frac{1}{2}(a+b+c)\varrho$. Pro pravoúhlý trojúhelník CDP, v němž známe délky všech stran, tak dostáváme (připomeňme, že $|PC| = 1 + x = \frac{5}{4}$)

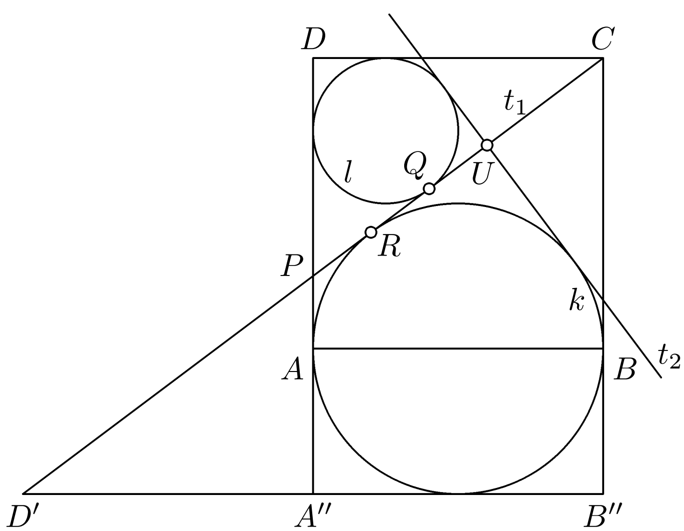
$$r = \frac{\frac{1}{2}|CD| \cdot |DP|}{\frac{1}{2}(|CD| + |DP| + |PC|)} = \frac{1}{4}.$$

2. krok, 2. způsob.

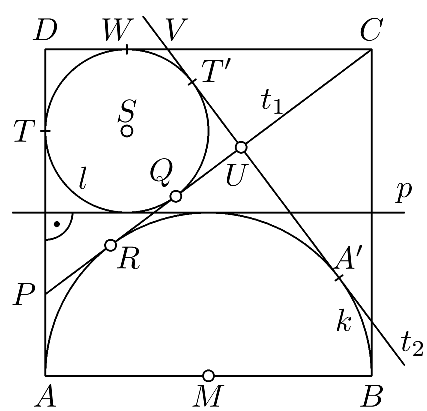
Nechť $A''B''$ je obraz úsečky AB v posunutí ve směru polopřímky CB o délku $\frac{1}{2}$ (obr. 9). Označme D' průsečík přímek $A''B''$ a t_1. Potom kružnice, jejíž částí je polokružnice k, je vepsána trojúhelníku $D'B''C$ a navíc jsou trojúhelníky $D'B''C$ a CDP podobné. Poměr poloměrů jejich vepsaných kružnic je tedy roven poměru jejich kratších odvěsen. To znamená, že $\frac{1}{2} : r = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$, neboli $r = \frac{1}{4}$.

3. krok, 1. způsob.

Podle 2. kroku víme, že průměr kružnice l je roven poloměru polokružnice k. Proto přímka p (osa úsečky AD) je společnou vnitřní tečnou polokružnice k a kružnice l (obr. 10). Přitom přímka p je kolmá na přímku AD, která je jejich vnější společnou tečnou. V osové souměrnosti podle středné SM obou kružnic je obrazem vnější tečny AD vnější tečna t_2 a obrazem vnitřní tečny p vnitřní tečna t_1. Jsou tedy navzájem kolmé i tečny t_1 a t_2.



Obr. 9



Obr. 10

3. krok, 2. způsob.

Označme V průsečík přímky t_2 se stranou CD. Protože délky obou společných *vnějších* tečen (pokud je bereme jako úsečky, jejichž krajními body jsou dotykové body) polokružnice k a kružnice l jsou stejné, tj. $|AT| = |A'T'|$, dostáváme na základě shodnosti délek tečen z bodu P ke kružnici l a shodnosti délek tečen z bodu U k polokružnici k

$$|AT| = |AP| + |PT| = |AP| + |PQ| = 2|AP| + |RQ|,$$
$$|A'T'| = |A'U| + |UT'| = |RU| + |UQ| = |RQ| + 2|UQ|,$$

což znamená, že $|UQ| = |AP| = \frac{1}{4}$. Dále z rovnosti délek tečen z bodu C k polokružnici k a kružnici l dostáváme $|RQ| = |CR| - |CQ| = |CB| - |CW| = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. To znamená, že $|PU| = \frac{3}{4} = |PD|$, takže čtyřúhelník $PUVD$ je deltoid, a tedy $|\sphericalangle PUV| = |\sphericalangle PDV| = 90^\circ$, tj. přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé.

Tím je důkaz hotový.

4. *Pokud máme n ($n \geqq 2$) přirozených čísel, můžeme s nimi provést následující operaci: vybereme několik z nich, ale ne všechna a každé z vybraných čísel nahradíme jejich aritmetickým průměrem. Zjistěte, zda je možno pro libovolnou počáteční n-tici dostat po konečném počtu kroků všechna čísla stejná, jestliže se n rovná*

a) 2 000,
b) 35,
c) 3,
d) 17.

Řešení. Rozeberme případ a) $n = 2\,000$. Vyberme tisíc čísel a proveďme s nimi danou operaci. Potom vezměme zbylých tisíc čísel a rovněž s nimi proveďme danou operaci. Dostaneme tisíc čísel rovných a a tisíc čísel rovných b. Pokud $a = b$, je úloha vyřešena. Pokud $a \neq b$, tak postupně vybírejme číslo rovné a a číslo rovné b a nahraďme je průměrem $\frac{a+b}{2}$. Takto můžeme vybrat $1\,000$ dvojic a všechna čísla nahradit číslem $\frac{1}{2}(a+b)$. Tedy pro $n = 2\,000$ existuje posloupnost kroků, která převede libovolných $2\,000$ čísel na stejná čísla.

Případ $n = 35$ budeme řešit podobně. Vyberme 7 disjunktních pětic a v každé z nich proveďme operaci popsanou výše, pričemž v každé dostaneme stejná čísla. Z každé nově vytvořené pětice vyberme teď jedno číslo. Dostaneme 7 čísel, s kterými opět provedeme danou operaci. Podobným způsobem vyberme další sedmice a vytvořme odpovídající průměry. Všechny sedmice budou stejné, neboť v každé pětici máme stejná čísla. Všechna čísla budou tedy stejná. I v tomto případě existuje posloupnost kroků, která převede libovolných 35 čísel na stejná čísla.

Uvažujme $n = 3$. Uvažujme trojici čísel $(1, 1, 2)$. Provádět danou operaci s dvěma jednotkami nemá smysl, takže po prvním kroku, který změní naši trojici, dostaneme čísla $(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Znovu jsme dostali dvě čísla stejná, která se nevyplatí „průměrovat“. Tedy další krok, který změní naši trojici, ji nechá v tvaru $(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2})$. Všimněme si, že po každém kroku je součet čísel stejný. Dokážeme to i v obecném případě: Označme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ daná čísla. Bez újmy na obecnosti proveďme krok s prvními m ($m < n$) čísly. Dostaneme čísla

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}, \ldots, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}}_{m\text{-krát}}, a_{m+1}, \ldots, a_n.$$

Jejich součet je $m\cdot\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m}+a_{m+1}+\ldots+a_n=a_1+\ldots+a_n$. Tím je uvedené tvrzení dokázáno.

Máme-li tedy dostat z čísel $(1,1,2)$ všechna čísla stejná, tak na konci úprav musíme dostat všechna čísla rovná $\frac{2+1+1}{3}=\frac{4}{3}$. Všimněme si, že při postupných krocích se ve jmenovateli čísel objevují jen mocniny čísla 2. Dokážeme to matematickou indukcí.

V prvním kroku to zřejmě platí. Po k krocích máme tři čísla, která mají ve jmenovateli jen mocniny čísla 2. V dalším kroku můžeme vybrat buď jedno číslo, které nám trojici nezmění, anebo dvě čísla. Nahradíme-li je jejich průměrem, budeme zřejmě dělit číslem 2. A znovu dostaneme ve jmenovateli jen mocninu dvojky. V každém kroku dostaneme tedy do jmenovatele jen mocniny dvojky, ale na konci úprav tam máme mít číslo 3, což je spor. Zjistili jsme, že pro $n=3$ neexistuje pro každou trojici čísel posloupnost kroků, která změní všechna čísla na stejná.

Případ $n=17$ dokážeme podobně jako případ $n=3$. Ukázali jsme dříve (pro obecné n), že v každém kroku zůstává zachován součet čísel. Vezměme tedy nějakou 17-tici přirozených čísel, jejíž součet není dělitelný 17. Na konci máme dostat 17-tici stejných čísel rovných $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{17}}{17}$, pričemž tento zlomek je v základním tvaru. V žádném kroku však nedostaneme do jmenovatele číslo 17. Toto tvrzení znovu dokážeme indukcí. První krok je zřejmý. Po k krocích dostaneme 17-tici čísel, v jejichž jmenovateli není číslo 17. Z těchto čísel vezměme $m<17$ a sečtěme je. Podle indukčního předpokladu dostaneme ve jmenovateli nejmenší společný násobek jmenovatelů vybraných čísel. Ten podle indukčního předpokladu nebude dělitelný 17. Pokud teď tento součet vydělíme číslem $m<17$, nedostaneme ve jmenovateli číslo dělitelné 17. Tudíž ani po $k+1$ krocích nedostaneme ve jmenovateli číslo dělitelné 17. Protože na konci musíme dostat čísla, která mají ve jmenovateli 17, dostáváme spor. Pro některé 17-tice přirozených čísel tedy nedokážeme najít posloupnost kroků, která z nich vytvoří stejná čísla.

5. *Zjistěte, pro která reálná čísla p má soustava*

$$\begin{aligned}x^2y-2x&=p,\\ y^2x-2y&=2p-p^2\end{aligned}$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel.

Řešení. Pokud vynásobíme první rovnici neznámou y a druhou neznámou x, dostaneme na levé straně obou rovnic x^2y^2-2xy. Porovnáním pravých stran máme

$$py=p(2-p)x. \tag{1}$$

Pokud $p=0$, vypadá daná soustava takto:

$$\begin{aligned}x^2y-2x&=0,\\ y^2x-2y&=0,\end{aligned}$$

přičemž po jednoduché úpravě je

$$x(xy-2)=0,$$
$$y(xy-2)=0.$$

Vidíme, že soustava má nekonečně mnoho řešení: je jím každá dvojice (x,y) reálných čísel taková, že $xy=2$. (Kromě těchto dvojic je řešením pouze dvojice $x=y=0$.)

Pokud $p=2$, dostaneme soustavu

$$x(xy-2)=2,$$
$$y(xy-2)=0,$$

která má jediné řešení $y=0$, $x=-1$.

Vraťme se teď k rovnici (1), pričemž budeme dále předpokládat, že $p\notin\{0,2\}$. Rovnici vydělíme číslem p:

$$y=(2-p)x. \tag{2}$$

Dosazením tohoto vztahu do první z daných rovnic dostáváme ($p\neq 2$) kubickou rovnici

$$(2-p)x^3-2x-p=0. \tag{3}$$

Řešení kubické rovnice obecně není tak jednoduché jako řešení kvadratické rovnice. V našem případě však můžeme uhodnout jeden její kořen $x=-1$. Potom můžeme polynom $(2-p)x^3-2x-p$ beze zbytku vydělit kořenovým činitelem $x+1$. Vydělením dostáváme

$$(2-p)x^3-2x-p=(x+1)\big((2-p)x^2+(p-2)x-p\big).$$

Stačí tedy vyřešit kvadratickou rovnici

$$(2-p)x^2+(p-2)x-p=0. \tag{4}$$

Uvědomme si, že neznámá y je jednoznačně určena neznámou x pomocí vztahu (2). Má-li tedy mít daná soustava právě tři řešení, musí mít rovnice (3) tři navzájem různá řešení. To znamená, že rovnice (4) musí mít dvě různá řešení, která se navíc nerovnají -1. Budeme zkoumat, kdy je diskriminant D rovnice (4) kladný. Jednoduchým výpočtem dostáváme

$$D=(p-2)^2-4(2-p)(-p)=(2-p)(3p+2).$$

Odtud vidíme, že $D>0$, právě když $p\in(-\frac{2}{3},2)$. Dosazením $x=-1$ snadno vidíme, že rovnice (4) má kořen -1 jen pro $p=\frac{4}{3}$. Rovnice (3) má proto tři různá řešení, právě když $p\in(-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{4}{3})\cup(\frac{4}{3},2)$.

Obráceně, má-li rovnice (3) tři různá řešení, má tři různá řešení i soustava (2), (3), která je však pro $p\neq 0$ a $p\neq 2$ ekvivalentní s danou soustavou.

Odpověď. Daná soustava má v oboru reálných čísel právě tři řešení, právě když $p\in(-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{4}{3})\cup(\frac{4}{3},2)$.

Poznámka. Úlohu je možno řešit více způsoby — například z první rovnice vyjádřit neznámou y pomocí x a to dosadit do druhé rovnice, anebo první rovnici vydělit x a druhou y a získané rovnice odečíst. Oba tyto způsoby opět vedou na kubickou rovnici (3).

6. *Je dán rovnostranný trojúhelník MPQ. Najděte množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC takových, že body P, Q jsou paty výšek z vrcholů A, B a bod M je střed strany AB.*

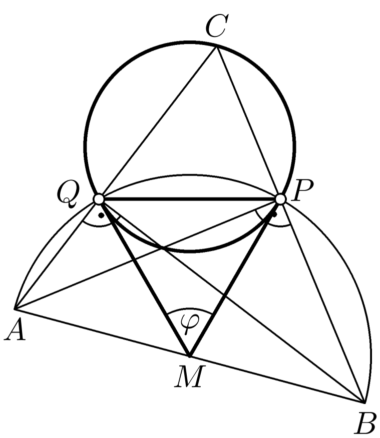
Řešení. Uvažujme trochu obecnější úlohu. Předpokládejme jen, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný se základnou PQ, pričemž $|\sphericalangle PMQ| = \varphi$. Označme standardně α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC. Body P, Q jsou paty výšek z bodů A, B, takže body A, B, P, Q leží na kružnici se středem M (jde o *Thaletovu kružnici* nad průměrem AB). To znamená, že $|MA| = |MB| = |MP| = |MQ|$, a tedy trojúhelník AMQ (pokud $A \neq Q$) je rovnoramenný; analogicky trojúhelník BMP. Potom platí

$$|\sphericalangle AMQ| = 180^\circ - 2|\sphericalangle MAQ|, \qquad |\sphericalangle BMP| = 180^\circ - 2|\sphericalangle MBP|, \tag{1}$$
$$|\sphericalangle PCQ| = \gamma.$$

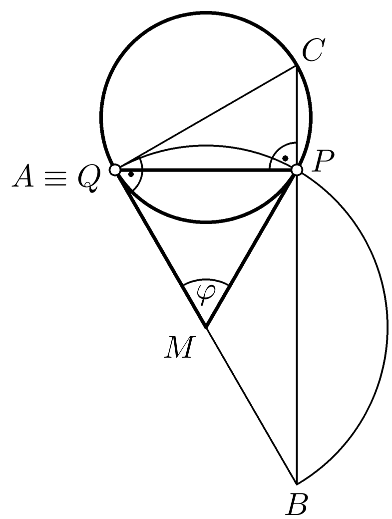
Dále rozeberme několik případů podle toho, zda má být trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý, anebo tupoúhlý.

Případ 1. Trojúhelník ABC je ostroúhlý. Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ. Navíc platí $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + \varphi + |\sphericalangle BMP| = 180^\circ$, odkud po dosazení (1) dostáváme $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Případ 2. Trojúhelník ABC má při vrcholu A pravý úhel. Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ. Dále $A \equiv Q$ a $|\sphericalangle BMP| = 180^\circ - \varphi$. Z (1) potom vyplývá $\beta = |\sphericalangle MBP| = \frac{1}{2}\varphi$, a tedy $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud je pravý úhel při vrcholu B, analogicky dostaneme $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.



Obr. 11

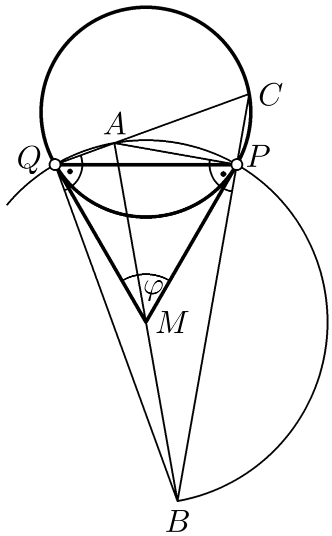


Obr. 12

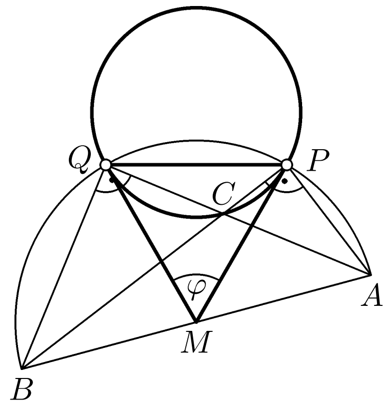
Případ 3. Trojúhelník ABC má při vrcholu A tupý úhel. Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ. Přitom $|\sphericalangle MAQ| = 180^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $\varphi - |\sphericalangle AMQ| + |\sphericalangle BMP| = 180^\circ$, odkud po dosazení (1) dostáváme $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud je tupý úhel při vrcholu B, analogicky dostaneme $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Případ 4. Trojúhelník ABC má při vrcholu C tupý úhel. Zřejmě body M a C leží ve stejné polorovině určené přímkou PQ. Dále z pravoúhlých trojúhelníků ABQ a ABP

dostáváme $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + |\sphericalangle BMP| = 180° + \varphi$. Z (1) potom vyplývá $\gamma = 90° + \frac{1}{2}\varphi$.



Obr. 13



Obr. 14

Zřejmě trojúhelník ABC nemůže mít při vrcholu C pravý úhel. Jinak by body C, P, Q splynuly. Celkově jsme tedy dostali, že pokud bod C leží v polorovině opačné k polorovině PQM, je $|\sphericalangle PCQ| = 90° - \frac{1}{2}\varphi$, a pokud bod C leží v polorovině PQM, je $|\sphericalangle PCQ| = 90° + \frac{1}{2}\varphi$. Množinou všech takových bodů C je tedy kružnice, označme ji k, nad tětivou PQ s výjimkou bodů P, Q (kde větší oblouk kružnice k je částí množiny všech bodů X takových, že $|\sphericalangle PXQ| = 90 - \frac{1}{2}\varphi$).

Obráceně nechť $C \in k \setminus \{P, Q\}$ a MPQ je rovnoramenný trojúhelník se základnou PQ. Potom si snadno uvědomíme, jako bychom sestrojili body A, B. Bod A leží na přímce CQ a na přímce, která je kolmá na CP a prochází bodem P. Analogicky dostaneme bod B. V takovémto trojúhelníku ABC budou body P, Q patami výšek z vrcholů A, B. Stačí tedy dokázat, že M je střed AB. Označme N střed strany AB. Dokážeme, že $M \equiv N$. Označme $\psi = |\sphericalangle PNQ|$. Zřejmě bod N leží v polorovině PQM a je středem kružnice, na které leží body A, B, P, Q, takže trojúhelník NPQ je rovnoramenný se základnou PQ. Přitom z výše uvedených úvah vyplývá, že pokud bod C leží v polorovině opačné k polorovině PQM, je $\gamma = 90° - \frac{1}{2}\psi$, a pokud bod C leží v polorovině PQM, je $\gamma = 90° + \frac{1}{2}\psi$. To znamená, že $\psi = \varphi$. Navíc oba body M a N leží na ose úsečky PQ. Takže nutně $M \equiv N$, a tedy M je opravdu střed strany AB.

Odpověď. Hledanou množinou všech vrcholů C je kružnice k s výjimkou bodů P, Q. Speciálně pro $\varphi = 60°$ je k kružnice souměrně sdružená s kružnicí opsanou trojúhelníku MPQ podle přímky PQ.

Jiné řešení. Uvažujme znovu obecnější úlohu jako v předcházejícím řešení. Opět si uvědomme, že body A, B, P, Q leží na kružnici se středem M. Vzhledem k tomu, že M je střed úsečky AB, leží aspoň jeden z bodů A, B nutně v polorovině PQM. Bez újmy na obecnosti nechť je to bod B. Potom z věty o obvodových úhlech vyplývá, že

$|\sphericalangle QBP| = \frac{1}{2}\varphi$. Dále

$$|\sphericalangle BCQ| = 90^\circ - |\sphericalangle QBC| = 90^\circ - |\sphericalangle QBP| = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Pokud $\gamma < 90^\circ$, leží bod C v polorovině opačné k polorovině PQM a platí $\gamma = |\sphericalangle BCQ| = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud $\gamma > 90^\circ$, leží bod C v polorovině PQM a platí $\gamma = 180^\circ - |\sphericalangle BCQ| = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$.

Další postup je už analogický jako v prvním řešení.

Diskusi případů v obou řešeních můžeme částečně obejít. Stačí si uvědomit několik faktů. Pokud V je průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC, je bod C průsečíkem výšek v trojúhelníku ABV. Proto trojúhelník ABC má vlastnost ze zadání úlohy, právě když ji má trojúhelník ABC', kde $C' = V$. Znamená to, že množina vrcholů C všech vyhovujících trojúhelníků je totožná s množinou jejich průsečíků výšek V. Protože body C, V leží vždy v opačných polorovinách určených přímkou PQ a platí $|\sphericalangle PVQ| + |\sphericalangle PCQ| = 180^\circ$, stačí najít množinu vrcholů C jen v jedné ze zmíněnych polorovin (jak už víme, je jí kružnicový oblouk), v druhé polorovině touto množinou pak musí být doplněk toho oblouku do celé kružnice.