Úlohy domácího kola kategorie C

1. *Dokažte, že existuje jediná číslice c, pro kterou lze najít jediné přirozené číslo n končící číslicí c a mající tu vlastnost, že číslo $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla.*

Řešení. Nechť (liché) číslo $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla p, pak p je rovněž liché číslo. Ze vztahu $p^2 = 2n+1$ vyplývá, že $n = \frac{1}{2}(p^2-1) = \frac{1}{2}(p-1)(p+1)$. Sestavme tabulku několika prvních lichých prvočísel p a jim odpovídajících čísel n:

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
n	4	12	24	60	84	144	180	264	420	480	684	840	924

Číslo n je zřejmě sudé, dokonce je (jak prozrazuje i tabulka pro několik hodnot p) dělitelné čtyřmi. To je vidět z toho, že součin $(p-1)(p+1)$ dvou po sobě jdoucích sudých čísel je vždy dělitelný osmi. Z tabulky navíc vidíme, že se mezi číslicemi, kterými n končí vícekrát, vyskytují číslice 0 a 4, jen jednou číslice 2, nevyskytují se 6 a 8.

Podívejme se, jakou číslicí končí číslo n v závislosti na číslici a, kterou končí číslo p. Je-li $p = 10k+a$, kde k je celé nezáporné číslo a a lichá číslice, pak pro jednotlivá možná a dostaneme:

- Je-li $a = 1$, je $n = 10k(5k+1)$, takže číslo n končí číslicí 0.
- Je-li $a = 3$, je $n = 10k(5k+4)+4$, takže číslo n končí číslicí 4.
- Je-li $a = 5$, je $n = 10(5k^2+5k+1)+2$, takže číslo n končí číslicí 2.
- Je-li $a = 7$, je $n = 10(5k^2+7k+2)+4$, takže číslo n končí číslicí 4.
- Je-li $a = 9$, je $n = 10(k+1)(5k+4)$, takže číslo n končí číslicí 0.

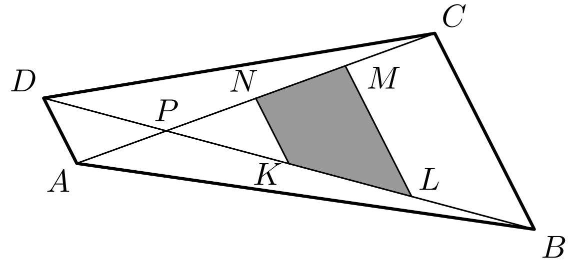
Je-li $2n+1$ druhou mocninou lichého prvočísla (lichého čísla), může číslo n končit jedině číslicemi 0, 2, 4. Jediným kandidátem na hledanou číslici tak zůstává 2.

Pokud $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla a n končí číslicí 2, prvočíslo p se dá vyjádřit ve tvaru $10k+5 = 5(2k+1)$, je tedy dělitelné pěti. Jediné prvočíslo, které je dělitelné pěti, je číslo 5.

Hledanou číslicí je tedy $c = 2$; pro ni existuje jediné přirozené číslo $n = 12$, které končí číslicí c, přičemž $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla.

2. *Ve čtyřúhelníku $ABCD$ se úhlopříčky protínají v bodě P, úhlopříčka AC je rozdělena body P, N a M na čtyři shodné úseky ($|AP| = |PN| = |NM| = |MC|$) a úhlopříčka BD je rozdělena body L, K a P na čtyři shodné úseky ($|BL| = |LK| = |KP| = |PD|$). Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$.*

Řešení. Trojúhelníky APD a NPK jsou souměrně sdružené podle středu P (obr. 1), AD a NK jsou tudíž rovnoběžné a $|AD| = |NK|$. Z rovnosti příslušných úseček dále plyne, že trojúhelníky KNP, LMP a BCP jsou podobné, proto $NK \parallel ML \parallel BC$ a navíc $|LM| = 2|KN|$ a $|BC| = 3|KN|$. Označíme-li s obsah trojúhelníku APD, je obsah trojúhelníku NKP roven s a obsah trojúhelníku MLP je $4s$ (má dvakrát větší výšku z vrcholu P než trojúhelník NKP z téhož vrcholu a jeho strana ML je dvakrát větší než strana NK). Obsah lichoběžníku $KLMN$ je proto $3s$.



Obr. 1

Strana AP trojúhelníku APD je čtyřikrát menší než strana AC trojúhelníku ACD, výšky z vrcholu D jsou v obou trojúhelnících stejné, proto je obsah trojúhelníku ACD roven $4s$. Strana PN trojúhelníku PNK je čtyřikrát menší než strana AC trojúhelníku ACB, kdežto výška trojúhelníku PNK z vrcholu K je třikrát menší než výška trojúhelníku ABC z vrcholu B, proto je obsah trojúhelníku ACB roven $12s$. Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je roven součtu obsahů trojúhelníků ABC a ACD, tedy $16s$.

Poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$ je roven $3 : 16$.

3. *Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které jsou řešením nerovnice*

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$

Řešení. Ze zadání plyne, že x a y jsou nutně přirozená čísla. Vynásobením obou stran nerovnice kladným číslem $y\sqrt{x}$ přejdeme k ekvivalentní nerovnici

$$xy + 6 < 5\sqrt{xy}.$$

Její úpravou dostaneme

$$(\sqrt{xy} - 3)(\sqrt{xy} - 2) < 0,$$

což platí, právě když $2 < \sqrt{xy} < 3$, neboli $4/x < y < 9/x$.

Protože x a y jsou přirozená čísla, z poslední nerovnosti plyne, že stačí uvažovat jen $x \leqq 9$. Lehce pak určíme všechny dvojice (x, y) celých čísel, které jsou řešením poslední nerovnice, a tedy i dané nerovnice, která je s ní ekvivalentní: $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(1, 7)$, $(1, 8)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$, $(7, 1)$, $(8, 1)$ a $(9, 1)$.

4. *Josef se vracel z výletu. Nejdříve jel vlakem a pak pokračoval ze zastávky na kole. Celá cesta mu trvala přesně 1 hodinu 30 minut a urazil při ní vzdálenost 60 km. Vlak jel průměrnou rychlostí 50 km/h. Určete, jak dlouho jel Josef na kole, když jeho rychlost v km/h je vyjádřena přirozeným číslem stejně jako vzdálenost měřená v km, kterou na kole ujel.*

ŘEŠENÍ. Označme v vzdálenost v kilometrech, kterou Josef ujel na kole, a r jeho rychlost v km/h. Podle zadání jsou r a v přirozená čísla a $v < 60$. Na kole jel Josef po dobu v/r h. Vlakem ujel vzdálenost $(60 - v)$ km a tuto vzdálenost ujel za $(60 - v)/50$ h. Proto podle zadání platí

$$\frac{60 - v}{50} + \frac{v}{r} = \frac{3}{2}.$$

Tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$50v - 15r - rv = 0,$$

kterou ještě upravíme na tvar

$$(50 - r)(v + 15) = 15 \cdot 50 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

Odtud plyne, že $50 - r$ je přirozené číslo menší než 50 a $v + 15$ přirozené číslo větší než 15, jež nepřevyšuje 75, a navíc, že součin $(50 - r)(v + 15)$ je dělitelný číslem 5^3. Mohou nastat čtyři případy.

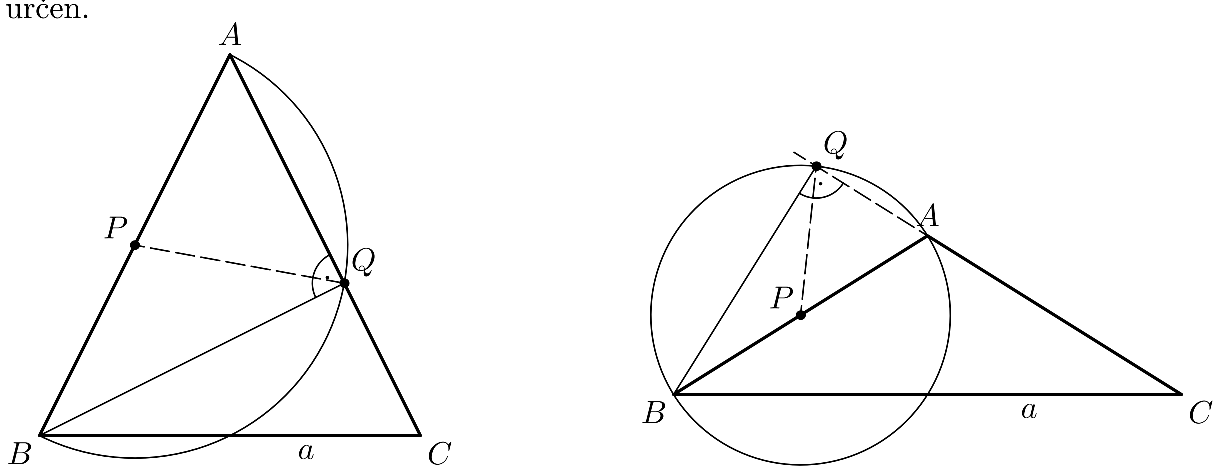
- $5^3 \mid 50 - r$. To není možné, protože $1 \leqq 50 - r < 50$.
- $5^2 \mid 50 - r$ a $5 \mid v + 15$. Číslo $50 - r$ je proto rovno 25, odtud $r = 25$ a $v = 15$.
- $5 \mid 50 - r$ a $5^2 \mid v + 15$. Číslo $v + 15$ je tudíž prvkem množiny $\{25, 50\}$, odtud dopočítáme další dvě možnosti $r = 20$, $v = 10$ a $r = 35$, $v = 35$.
- $5^3 \mid v + 15$. To není možné, protože $15 < v + 15 < 75$.

Možné časy Josefovy jízdy na kole (v minutách) proto jsou $15 \cdot 60/25 = 36$, $10 \cdot 60/20 = 30$ a $35 \cdot 60/35 = 60$.

Výčtem všech možností jsme zjistili, že pokud Josef cestoval podle zadání úlohy, pak jel na kole buď 30, nebo 36, anebo 60 minut.

5. *Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC dané délky a, je-li dán střed P strany AB a bod Q ($Q \neq P$), který je patou výšky z vrcholu B.*

ŘEŠENÍ. Úhel BQA je buď pravý, nebo $Q = A$. Proto bod Q leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem BA. (Na obr. 2 je znázorněn případ ostroúhlého i tupoúhlého trojúhelníku ABC.) Protože P je střed úsečky AB, je $|PQ|$ velikost poloměru této kružnice, proto velikost průměru $|AB|$ této kružnice je rovna $2|PQ|$. Trojúhelník ABC má délku ramene $2|PQ|$, a protože známe velikost základny, je tím jednoznačně určen.



Obr. 2

Odtud již plyne *konstrukce.* Nejdříve sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ shodný s trojúhelníkem ABC o velikostech stran $|A'B'| = |A'C'| = 2|PQ|$ a $|B'C'| = a$, který potom přemístíme tak, aby se střed strany $A'B'$ zobrazil na bod P a pata výšky z vrcholu B' na bod Q. To lze provést jednoznačně až na osovou souměrnost podle přímky PQ. Pokud tedy trojúhelník $A'B'C'$ existuje, má úloha dvě řešení souměrně sdružená podle osy PQ.

Diskuse je zřejmá. Trojúhelník ABC lze setrojit právě tehdy, když lze sestrojit rovnoramenný trojúhelník $A'B'C'$, tj. když $a < 4|PQ|$ (trojúhelníkové nerovnosti), v tomto případě má úloha právě dvě (shodná) řešení. Navíc pro $a < 2\sqrt{2}|PQ|$ bude trojúhelník ABC ostroúhlý, pro $a = 2\sqrt{2}|PQ|$ pravoúhlý a pro $2\sqrt{2}|PQ| < a < 4|PQ|$ tupoúhlý. *Důkaz* správnosti plyne z rozboru úlohy.

Jiné řešení. Označme R střed strany BC, ten je zároveň patou výšky z vrcholu A. Oba body Q a R tedy leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB se středem P, proto $|PQ| = |PR| = \frac{1}{2}|AB|$. Jelikož úhel BQC je pravý, leží bod Q na Thaletově kružnici nad průměrem BC se středem R, takže $|RQ| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a$. Trojúhelník PQR je proto podobný trojúhelníku ABC (koeficent podobnosti je $\frac{1}{2}$).

Při *konstrukci* nejdříve sestrojíme trojúhelník PQR. Na přímce rovnoběžné se střední příčkou PR procházející bodem Q najdeme bod $C \neq Q$ tak, aby $|RC| = \frac{1}{2}a$. Body A a B pak už sestrojíme snadno.

Pro dané body P, Q můžeme sestrojit třetí vrchol R trojúhelníku PQR dvěma způsoby. *Diskuse* je tedy stejná jako v předcházejícím řešení. *Důkaz* správnosti plyne z rozboru úlohy.

6. *Jistý panovník pozval na oslavu svých narozenin* 28 *rytířů. Každý z rytířů měl mezi ostatními právě tři nepřátele.*

a) Ukažte, že panovník může rytíře rozesadit ke dvěma stolům tak, aby každý rytíř seděl u stejného stolu s nejvýše jedním nepřítelem.

b) Ukažte, že v případě libovolného takového rozesazení sedí u každého stolu nejvýše 16 *rytířů.*

(Nepřátelství je vzájemný vztah: Je-li A nepřítelem B, je i B nepřítelem A.)

Řešení.

a) Rozesaďme v prvním kole rytíře ke stolům libovolným způsobem. Označme n_1 počet nepřátel prvního rytíře u stolu, u kterého sedí, potom $n_1 \leqq 3$. Podobně označme $n_2 \leqq 3$ počet nepřátel druhého rytíře u stolu, u kterého sedí, atd. Potom pro „hladinu nepřátelství“

$$N_1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_{28}$$

v prvním kole platí $0 \leqq N_1 \leqq 3 \cdot 28 = 54$, přičemž N_1 je celé nezáporné číslo.

Předpokládejme, že existuje rytíř, který sedí u stolu s alespoň dvěma nepřáteli. Pak ho přesadíme ke druhému stolu. Tím vznikne nové rozesazení. Zkoumejme nyní hladinu nepřátelství N_2 po tomto druhém kole.

Pokud přesazený rytíř r seděl původně u jednoho stolu se všemi třemi nepřáteli a, b, c, po jeho přesazení se počet nepřátel rytíře r u stolu, u kterého teď sedí, snížil o 3 na nulu, a počet nepřátel rytířů a, b a c u téhož stolu se snížil o jednu. Počty nepřátel zbývajících rytířů u jejich stolů se nezměnily. Tedy $N_2 = N_1 - 6$.

Pokud přesazený rytíř r seděl původně u jednoto stolu se dvěma nepřáteli a a b a byl přesazen ke stolu s nepřítelem c, po jeho přesazení se počet nepřátel rytíře r u stolu, u kterého nyní sedí, snížil o 1 ze dvou na jednoho, počet nepřátel rytířů a a b u jejich stolu se o jedna snížil, a počet nepřátel rytíře c u stolu, u kterého sedí, se zvýšil o 1. Počty nepřátel zbývajících rytířů u jejich stolů se nezměnily. V tomto případě je tedy $N_2 = N_1 - 2$.

V obou případech vychází $N_2 < N_1$.

Pokud ještě po tomto kole existuje rytíř, který sedí u jednoho stolu s alespoň dvěma svými nepřáteli, opět ho požádáme, aby si přesedl k druhému stolu. Pro hladinu nepřátelství N_3 po třetím kole bude ze stejných důvodů jako výše platit $N_3 < N_2$.

Stejným způsobem vytvoříme hladiny nepřátelství $N_4 > N_5 > \cdots$ po dalších kolech.

Protože v každém kole je hladina nepřátelství menší než v předešlém kole, je vyjádřena celým nezáporným číslem a hladina nepřátelství v prvním kole je nejvýše 54, může se taková situace opakovat nejvýše čtyřiapadesátkrát. Počet kol musí být tedy konečný a po posledním kole už neexistuje rytíř, který by seděl u jednoho stolu s alespoň dvěma nepřáteli. Tím jsme dokázali část a).

b) Předpokládejme, že rytíři jsou nyní rozesazeni u stolů A a B tak, že každý sedí u stejného stolu s nejvýše jedním nepřítelem. Označme r_A počet rytířů u stolu A a r_B počet rytířů u stolu B. Platí

$$r_A + r_B = 28. \tag{1}$$

Každý z rytířů u stolu A má u stolu B alespoň dva nepřátele a každý z rytířů stolu B je nepřítelem nejvýše tří rytířů od stolu A, proto pro počet p těch nepřátelských dvojic, jež sedí u různých stolů, platí

$$2r_A \leqq p \quad \text{a} \quad p \leqq 3r_B, \quad \text{takže } 2r_A \leqq 3r_B.$$

Dosadíme-li do této nerovnice z (1) $r_B = 28 - r_A$, dostaneme po úpravě $5r_A \leqq 84$. Vzhledem k tomu, že r_A je celé nezáporné číslo, musí platit $r_A \leqq 16$. S ohledem na symetrii situace platí analogicky $r_B \leqq 16$. Tím jsme splnili část b).

V části b) můžeme postupovat také sporem: Kdyby u stolu A sedělo aspoň 17 rytířů, měli by dohromady u stolu B aspoň $17 \cdot 2 = 34$ nepřátel, přitom každý rytíř-nepřítel je v tomto čísle započítán nejvýše třikrát. Protože $3 \cdot 11 < 34$, sedí u stolu B aspoň 12 rytířů, dohromady u obou stolů A a B je pak aspoň $17 + 12 = 29$ rytířů, což odporuje zadání.