51. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie A

1. V oboru celých čísel x řešte rovnici

$$3(x^2)_5 + (3x)_5 = (3x-2)(x+2),$$

kde n_5 značí násobek pěti nejbližší číslu n, např. $(-3)_5 = -5$.

2. Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P, Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC. Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné.

3. Zjistěte, pro která reálná čísla p má soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^2+1 &= (p+1)x + py - z,\\ y^2+1 &= (p+1)y + pz - x,\\ z^2+1 &= (p+1)z + px - y \end{aligned}$$

s neznámými x, y, z právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie A se koná

v úterý 4. prosince 2001

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Podle zbytku při dělení čísla x číslem 5 můžeme rozlišit pět případů: (i) $x = 5k$, (ii) $x = 5k + 1$, (iii) $x = 5k + 2$, (iv) $x = 5k + 3$ a (v) $x = 5k + 4$ (k značí libovolné celé číslo). Protože ale levá strana rovnice je zřejmě násobkem pěti pro každé celé x, musí být násobkem pěti aspoň jeden z činitelů $3x-2$, $x+2$ pravé strany. Číslo $3x-2$ je dělitelné pěti pouze pro $x = 5k + 4$, číslo $x + 2$ pouze pro $x = 5k + 3$. Proto stačí rozebrat případy (iv) a (v) (L značí levou a P pravou stranu dané rovnice):

(iv) Pro $x = 5k+3$ platí $x^2 = 25k^2 + 30k + 9$, $(x^2)_5 = 25k^2 + 30k + 10$, $3x = 15k + 9$, $(3x)_5 = 15k + 10$, $L = 75k^2 + 105k + 40$ a $P = 75k^2 + 110k + 35$, takže z $L = P$ vychází $k = 1$, čemuž odpovídá $x = 5 + 3 = 8$.

(v) Pro $x = 5k+4$ platí $x^2 = 25k^2 + 40k + 16$, $(x^2)_5 = 25k^2 + 40k + 15$, $3x = 15k + 12$, $(3x)_5 = 15k + 10$, $L = 75k^2 + 135k + 55$ a $P = 75k^2 + 140k + 60$, takže z $L = P$ vychází $k = -1$, čemuž odpovídá $x = -5 + 4 = -1$.

Odpověď: Daná rovnice má právě dvě celočíselná řešení, a to $x = -1$ a $x = 8$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů (samozřejmě i v případě, kdy student rozebere správně všechny možnosti (i)–(v)), v ostatních případech udělte 1 bod za každé uhodnuté řešení, 2 body za zdůvodnění toho, že x je tvaru $5k + 3$ nebo $5k + 4$.

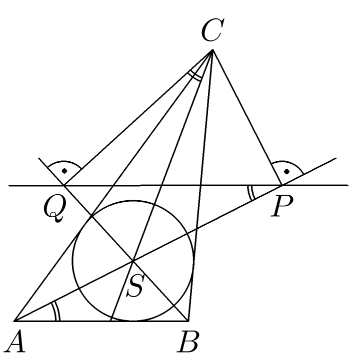
2. Označme jako obvykle α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC. Protože platí (obr. 1)

$$|\sphericalangle ASC| = 180^\circ - |\sphericalangle SAC| - |\sphericalangle SCA| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

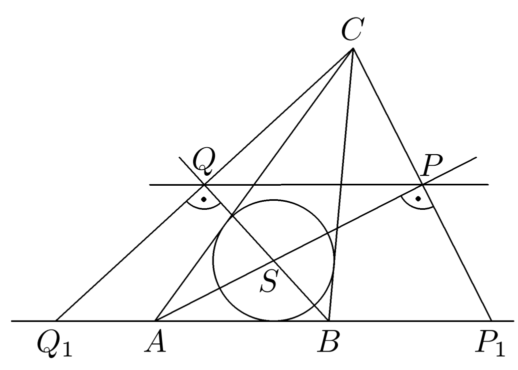
je úhel ASC tupý, takže bod P leží na polopřímce opačné k polopřímce SA. Obdobně zdůvodníme, že bod Q leží na polopřímce opačné k polopřímce SB. Přímky AB a PQ jsou rovnoběžné, právě když střídavé úhly BAP a APQ jsou shodné. Vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle BAP| = \dfrac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle SPQ|$, stačí ukázat, že $|\sphericalangle SPQ| = \dfrac{\alpha}{2}$. Protože body P a Q leží na Thaletově kružnici nad průměrem CS, je úhel SPQ shodný s úhlem SCQ (obvodové úhly nad tětivou SQ zmíněné kružnice). Velikost úhlu SCQ snadno vyjádříme z trojúhelníků BCS a BCQ:

$$|\sphericalangle SCQ| = |\sphericalangle BCQ| - |\sphericalangle BCS| = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

což jsme potřebovali ukázat.



Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Označme P_1, Q_1 odpovídající průsečíky polopřímek CP a CQ s přímkou AB (obr. 2, pořadí bodů A, S, P a bodů B, S, Q na obou osách bylo vysvětleno v prvním řešení). Výška AP trojúhelníku P_1CA leží na ose AS jeho vnitřního úhlu P_1AC, takže jde o rovnoramenný trojúhelník, který má základnu P_1C se středem P. Obdobně pomocí rovnoramenného trojúhelníku Q_1CB zdůvodníme, že bod Q je středem úsečky Q_1C. Úsečka PQ je tedy střední příčkou trojúhelníku P_1Q_1C, takže je rovnoběžná s přímkou AB.

Za úplné řešení je 6 bodů. Pokud chybí zmínka o pořadí bodů A, S, P a B, S, P na příslušných osách, strhněte 1 bod.

3. Všimněme si, že rovnice dané soustavy se mezi sebou liší jen cyklickou záměnou neznámých x, y a z. Má-li proto soustava za řešení trojici čísel $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$, jsou jejími řešeními rovněž trojice $(x, y, z) = (y_0, z_0, x_0)$ a trojice $(x, y, z) = (z_0, x_0, y_0)$. Je-li řešení soustavy (při pevném p) jediné, musí být uvedené trojice shodné, musí tedy platit $x_0 = y_0 = z_0$. Trojice (x_0, x_0, x_0) je zřejmě řešení dané soustavy, právě když je číslo $x = x_0$ řešením rovnice $x^2 + 1 = 2px$. Pro každé hledané p proto musí mít poslední rovnice jediné řešení, takže její diskriminant $D = 4p^2 - 4$ musí být nulový. Odtud vychází, že nutně $p = \pm 1$.

Nyní ukážeme, že pro $p = 1$ je $x = y = z = 1$ skutečně jediné řešení původní soustavy tří rovnic a že totéž platí i v případě $p = -1$ o jejím řešení $x = y = z = -1$. Porovnáme-li součet levých stran se součtem pravých stran soustavy, zjistíme, že její libovolné řešení (x, y, z) splňuje též rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2p(x + y + z),$$

ze které úpravou dostaneme

$$(x - p)^2 + (y - p)^2 + (z - p)^2 = 3(p^2 - 1). \tag{1}$$

Pro obě hodnoty $p = \pm 1$ platí ovšem $p^2 - 1 = 0$, takže tehdy se součet nezáporných čísel $(x - p)^2$, $(y - p)^2$ a $(z - p)^2$ rovná nule. To je možné, jedině když $x = y = z = p$.

Odpověď: Hledané hodnoty p jsou dvě: $p = 1$ a $p = -1$.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešením získáme sečtením tří daných rovnic rovnici (1). Z ní vyplývá tento závěr: má-li soustava při daném p aspoň jedno řešení (x, y, z) v oboru reálných čísel, pak platí nerovnost $p^2 \geqq 1$, neboli $|p| \geqq 1$. Je-li ovšem $|p| > 1$, můžeme snadno vypsat dvě různá řešení zkoumané soustavy, totiž trojice (x_1, x_1, x_1) a (x_2, x_2, x_2), kde $x_{1,2}$ jsou kořeny rovnice $x^2 + 1 = 2px$ (jejíž diskriminant je díky předpokladu $|p| > 1$ kladný). Proto nám zbývá posoudit pouze hodnoty $p = \pm 1$, pro které však z rovnice (1) okamžitě plyne: má-li původní soustava vůbec nějaké řešení, je jím trojice $(x, y, z) = (p, p, p)$. Triviální zkouška dosazením ukazuje, že jde skutečně o řešení (pro $p = 1$ jakož i pro $p = -1$).

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za vyloučení všech hodnot $|p| < 1$, 2 body za vyloučení všech hodnot $|p| > 1$ a 2 body za ověření čísel $p = \pm 1$. (Tedy například za zdůvodnění, proč nutně platí $|p| = 1$, udělíme 4 body.)