51. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie B

1. Určete reálné číslo p tak, aby rovnice

$$x^2 + 4px + 5p^2 + 6p - 16 = 0$$

měla dva různé kořeny x_1, x_2 a aby součet $x_1^2 + x_2^2$ byl co nejmenší.

2. Uvnitř stran BC, CA, AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou po řadě vybrány body X, Y a Z tak, že každému ze čtyřúhelníků $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ lze opsat kružnici. Dokažte, že body X, Y, Z jsou paty výšek trojúhelníku ABC.

3. Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, ..., 17. Čísla postupně mažeme, a to tak, že z dosud nesmazaných čísel zvolíme libovolné číslo k a smažeme všechna ta čísla na tabuli, která dělí $k + 17$. Dokažte, že opakováním této procedury se nám nepodaří všechna čísla smazat.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie B se koná

v úterý 22. ledna 2002

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Pro kořeny x_1, x_2 dané kvadratické rovnice (pokud existují) platí podle Viètových vztahů rovnosti

$$x_1 + x_2 = -4p \quad \text{a} \quad x_1x_2 = 5p^2 + 6p - 16,$$

ze kterých vypočteme zkoumaný součet

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4p)^2 - 2(5p^2 + 6p - 16) = \\ = 6p^2 - 12p + 32 = 6(p - 1)^2 + 26.$$

Odtud plyne nerovnost $x_1^2 + x_2^2 \geqq 26$, přitom rovnost může nastat, jen když $p = 1$. Zjistíme proto, zda pro $p = 1$ má daná rovnice skutečně dvě různá řešení: jde o rovnici $x^2+4x-5 = 0$ s kořeny $x_1 = -5$ a $x_2 = 1$. Tím je úloha vyřešena.

Dodejme, že většina řešitelů patrně nejprve zjistí, pro která p má daná rovnice dva různé kořeny. Protože pro její diskriminant D platí

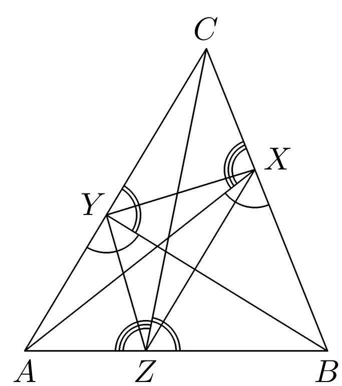
$$D = (4p)^2 - 4(5p^2 + 6p - 16) = -4p^2 - 24p + 64 = -4(p + 8)(p - 2),$$

jsou taková p právě čísla z intervalu $(-8, 2)$.

Odpověď: Maximální hodnota součtu $x_1^2 + x_2^2$ (rovná 26) odpovídá jedinému číslu $p = 1$.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 4 body za vyjádření součtu $x_1^2 + x_2^2$ kvadratickou funkcí $6p^2 - 12p + 32$, 1 bod za nalezení jejího minima a 1 bod za prověrku toho, že v bodě minima $p = 1$ má rovnice skutečně dva různé kořeny (třeba i formou nalezení intervalu $p \in (-8, 2)$ z nerovnosti $D > 0$).

2. V tětivovém čtyřúhelníku $ABXY$ označme $\varphi = |\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AYB|$ velikost obou shodných obvodových úhlů nad společnou tětivou AB (obr. 1). Podobně označme



Obr. 1

$\psi = |\sphericalangle BZC| = |\sphericalangle BYC|$ a $\omega = |\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle CZA|$ velikosti shodných obvodových úhlů nad tětivami BC a CA v tětivových čtyřúhelnících $BCYZ$ a $CAZX$. Zapíšeme-li postupně rovnosti pro každou ze tří dvojic vyznačených sousedních úhlů ve vrcholech X, Y a Z, dostaneme pro neznámé velikosti φ, ψ a ω soustavu tří lineárních rovnic

$$\begin{aligned}\varphi + \psi &= \pi,\\ \psi + \omega &= \pi,\\ \omega + \varphi &= \pi,\end{aligned}$$

která má jediné řešení $\varphi = \psi = \omega = \frac{1}{2}\pi$, jak snadno zjistíme např. odečtením libovolných dvou rovnic a dosazením. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Jsou-li naopak body X, Y a Z paty výšek trojúhelníku ABC, jsou čtyřúhelníky $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ tětivové podle Thaletovy věty.

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. Protože pro zvolené číslo k vždy platí $18 \leqq k + 17 \leqq 34$ a mezi čísly $18, 19, \ldots, 34$ má každé z čísel $12, 13, \ldots, 17$ pouze jeden násobek (totiž dvojnásobek), libovolné číslo $m \in \{12, 13, \ldots, 17\}$ smažeme pouze při volbě jediného čísla k (při kterém $k + 17 = 2m$). Například číslo 15 smažeme pouze volbou $k = 13$, číslo 13 pouze volbou $k = 9$. Ke smazání obou čísel 15 a 13 tedy musíme někdy vybrat $k = 13$ a někdy později $k = 9$. Pak ale v okamžiku výběru čísla $k = 9$ je už smazáno jak číslo 10 (smazali jsme ho nejpozději při výběru $k = 13$), tak číslo 1 (to jsme smazali hned při prvním výběru). Při žádném dalším výběru už proto nesmažeme číslo 9, protože číslo $k + 17$ je dělitelné devíti pouze při výběrech $k = 1$ a $k = 10$. Dokázali jsme, že opakováním dané procedury nelze smazat všechna tři čísla 15, 13 a 9, tím spíše nelze smazat všechna čísla od 1 do 17.

Jiné řešení. Připusťme, že všechna čísla lze smazat po n výběrech čísla k (spojených s mazáním všech dělitelů čísla $k+17$) a že každým výběrem se něco umaže (jinak je takový výběr zbytečný). Poslední mj. znamená, že každé číslo je vybráno nejvýše jednou. Zřejmě $n > 1$ a pro poslední vybrané číslo k_n musí platit $k_n|(k_n+17)$, tj. $k_n = 17$ (možnost $k_n = 1$ je vyloučena tím, že číslo 1 je smazáno hned při prvním výběru). Před posledním výběrem jsou na tabuli jen dělitelé čísla 34, tedy kromě čísla 17 případně číslo 2. Kdyby tam číslo 2 nebylo, muselo by opět platit $k_{n-1} \,|\, (k_{n-1} + 17)$, což už možné není. Proto nutně $k_{n-1} = 2$. Taková volba je ale zbytečná, protože číslo $2 + 17$ je prvočíslo.

Za úplné řešení je 6 bodů.