51. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie C

1. Do sportovního kroužku chodí 21 chlapců. Na posledních dvou schůzkách nikdo nechyběl, chlapci se pokaždé rozdělili do tří družstev po sedmi hráčích. Dokažte, že někteří tři chlapci byli obě schůzky spolu v jednom družstvu.

2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k.

3. Určete všechny dvojice prvočísel (p, q) takové, že $p > q$ a číslo $p^2 - q^2$ má nejvýše čtyři dělitele.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie C se koná

v úterý 22. ledna 2002

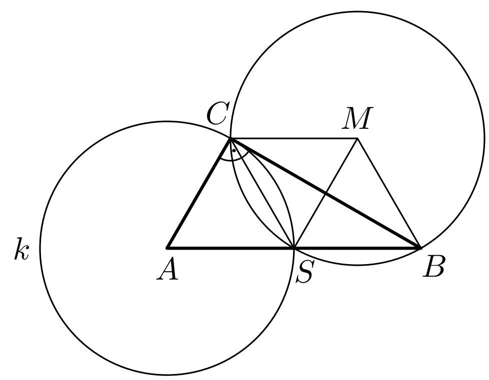
tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Uvažujme chlapce H. Šest jeho spoluhráčů z první schůzky je na druhé schůzce rozděleno do tří družstev. Pak jsou buď tři z nich v jednom družstvu, nebo jsou v těchto třech družstvech rozděleni po dvou. Chlapec H je však také členem některého z těchto družstev, a tedy v tomto družstvu se opět nachází trojice spoluhráčů z první schůzky.

Jiné řešení. Označme A, B, C družstva sestavená na první schůzce, D, E, F družstva sestavená na druhé schůzce. Podle zařazení do družstev jsou jednotliví chlapci nejvýše devíti různých typů AD, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, CF. Kdyby každého typu byli nejvýše dva chlapci, bylo by na schůzkách nejvýše $2 \cdot 9 = 18$ chlapců, což je spor s tím, že jich do kroužku chodí 21. Proto alespoň jednoho typu jsou alespoň tři chlapci, a to je hledaná trojice chlapců.

Za úplné řešení je 6 bodů.

2. Střed přepony S pravoúhlého trojúhelníku ABC je podle Thaletovy věty středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku, platí tedy $|CS| = |AS| = |BS|$ (obr. 1). Jelikož body C a S leží na kružnici k, platí $|AS| = |AC|$, je proto trojúhelník ASC rovnostranný a velikost úhlu CSB je rovna $120°$.



Obr. 1

Je-li M střed kružnice opsané trojúhelníku BCS, platí $|CM| = |SM| = |BM|$, a protože $|CS| = |BS|$, jsou CMS a SMB shodné rovnoramenné trojúhelníky se základnami CS a BS. Velikost úhlu CSB je součtem velikostí shodných úhlů CSM a MSB, je proto velikost úhlu MSB rovna $\frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$. Trojúhelník MSB je tedy rovnostranný a platí $|MS| = |BS|$.

Poloměr kružnice opsané trojúhelníku CSB je roven $|MS| = |BS| = |AS|$, což je poloměr kružnice k. Kružnice opsaná trojúhelníku BCS a kružnice k mají stejné poloměry, jsou tedy shodné. Tím je důkaz ukončen.

Poznámka: Po zjištění, že ASC je rovnostranný trojúhelník, je možné dokončit řešení i takto: je-li D bod souměrně sdružený s bodem A podle středu C, je trojúhelník ABC „polovinou“ rovnostranného trojúhelníku ABD, takže střed M jeho strany BD má od bodů B, S, C stejnou vzdálenost rovnou $\frac{1}{2}|AB|$.

Za úplné řešení je 6 bodů z toho 3 body za zdůvodnění, že ASC je rovnostranný trojúhelník.

3. Číslo 1 má právě jednoho dělitele 1. Určeme dále všechna přirozená čísla $a \neq 1$, která mají nejvýše čtyři dělitele. Takové číslo a má dva triviální dělitele 1 a a, proto může mít nejvýše další dva netriviální dělitele, takže je dělitelné nejvýše dvěma prvočísly. Je-li číslo a dělitelné dvěma různými prvočísly p_1 a p_2, je dělitelné i jejich součinem p_1p_2, vzhledem k uspořádání dělitelů čísla a musí tehdy být $a = p_1p_2$. Je-li číslo a dělitelné právě jedním prvočíslem p_1, platí $a = p_1^k$, kde k je přirozené číslo. Jeho netriviálními děliteli jsou čísla $p_1, p_1^2, \dots, p_1^{k-1}$, proto $k \leqq 3$.

Nejvýše čtyři dělitele tedy mají pouze číslo 1 a čísla tvaru p_1, p_1^2, p_1^3 a p_1p_2, kde p_1 a p_2 jsou různá prvočísla.

Nechť $p > q$ jsou prvočísla a číslo $a = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$ má nejvýše čtyři dělitele. Pak platí $1 \leqq p - q < p + q \leqq a$. Rozlišíme následující případy:

1. $p - q = 1$. Rozdíl prvočísel p, q je liché číslo, proto jedno z nich je sudé a druhé se liší o 1. Tedy $p = 3$, $q = 2$ a číslo $a = 3^2 - 2^2 = 5$ má dva dělitele 1 a 5.
2. $p - q > 1$. Číslo a má právě čtyři různé dělitele 1, $p - q$, $p + q$, a, proto vzhledem k úvodní úvaze mohou nastat dvě možnosti:
   a) $p-q$ je prvočíslo p_1 a $p+q$ je p_1^2. Pak ovšem p_1 dělí $p_1^2+p_1 = p+q+(p-q) = 2p$, přitom p je prvočíslo, takže $p_1 = p$ nebo $p_1 = 2$. Rovností $p - q = p_1$ je však možnost $p_1 = p$ vyloučena, proto musí platit $p_1 = 2$. Ze soustavy $p - q = 2$, $p + q = 4$ ovšem plyne $q = 1$, což není prvočíslo.
   b) $p-q$ je prvočíslo p_1 a $p+q$ je prvočíslo p_2. Protože $p_2 > p_1$, je prvočíslo p_2 liché. Odtud plyne $q = 2$, jinak by číslo p_2 bylo součtem dvou lichých prvočísel p a q, tedy číslo sudé. Tři prvočísla $p_1 = p - 2$, p a $p_2 = p + 2$ dávají různé zbytky při dělení třemi, takže jedno z nich je rovno 3. Z $p = 3$ ovšem plyne $p_1 = 1$, z $p_2 = 3$ zase $p = 1$, zbývá proto možnost $p_1 = 3$, tedy $p = 5$. Číslo $a = 5^2 - 2^2 = 21$ má právě čtyři dělitele 1, 3, 7, 21.

Všechny dvojice prvočísel (p, q) vyhovující zadání úlohy jsou dvojice $(3, 2)$ a $(5, 2)$.

Jiné řešení. Vysvětlíme nejdříve, proč $q = 2$. Připusťme naopak, že $q > 2$. Pak obě prvočísla p a q jsou lichá, takže $(p - q)$ a $(p + q)$ jsou dvě různá sudá čísla, tudíž jejich součin $p^2 - q^2$ je číslo tvaru $4k$, kde $k \geqq 2$. Takové číslo ale má čtyři dělitele 1, 2, 4 a $4k$, proto se jeho dělitel $2k$ musí rovnat číslu 4. Platí tedy $(p - q)(p + q) = 8$, odkud $p - q = 2$ a $p + q = 4$, takže $q = 1$, a to je spor. Rovnost $q = 2$ je dokázána.

Hledáme tedy všechna prvočísla $p > 2$, pro která má číslo $p^2 - 4$ nejvýše čtyři dělitele. Snadno se přesvědčíme, že vyhovuje $p = 3$ i $p = 5$. V případě $p \geqq 7$ je ovšem jedno z čísel $p + 2$, $p - 2$ dělitelné třemi (podle toho, zda prvočíslo p dává při dělení třemi zbytek 1 nebo 2), takže číslo $p^2 - 4$ má pět různých dělitelů 1, 3, $p - 2$, $p + 2$ a $p^2 - 4$.

Úloze tedy vyhovují dvě dvojice prvočísel (p, q): $(3, 2)$ a $(5, 2)$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za správnou diskusi každé z možností 1), 2a), 2b) udělte dva body. Za uhodnutí obou dvojic $(3, 2)$ a $(5, 2)$ udělte 1 bod, za zdůvodnění neexistence dalších řešení 4 body. Za důkaz rovnosti $q = 2$ udělte 3 body.