51. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie A

1. Dokažte, že pro libovolná čísla $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi)$ platí nerovnost

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqq 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastane rovnost.

2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y, pro které platí

$$x^2 = 4y + 3 \cdot n(x, y),$$

kde $n(x, y)$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y.

3. Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, jež se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, právě když platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.

4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= p(y + z), \\ y^2 - 1 &= p(z + x), \\ z^2 - 1 &= p(x + y) \end{aligned}$$

s neznámými x, y, z a parametrem p. Proveďte diskusi počtu řešení.

II. kolo kategorie A se koná

v úterý 15. ledna 2002

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Protože platí

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \leqq \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{1}$$

stačí místo nerovnosti ze zadání úlohy dokázat nerovnost

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}. \tag{2}$$

To je ale snadné, neboť po převedení odmocniny z pravé strany na levou dostaneme po úpravě „na čtverec" zřejmou nerovnost

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}\right)^2 \geqq 0. \tag{2'}$$

Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že nerovnost (2) též plyne z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (kladných) čísel $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ a $\dfrac{1}{\cos\beta}$.

Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když nastanou rovnosti v obou nerovnostech (1) a (2′). To lze zřejmě vyjádřit podmínkami

$$\sin(\alpha+\beta) = 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\beta},$$

které jsou pro nějaká $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi)$ splněny, právě když $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ a $\alpha = \beta$, neboli $\alpha = \beta = \frac{1}{4}\pi$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 5 bodů za důkaz nerovnosti a 1 bod za analýzu rovnosti, ne však za pouhé uhodnutí podmínky $\alpha = \beta = \frac{1}{4}\pi$ (bez vysvětlení, proč jindy rovnost neplatí).

2. Protože číslo x je dělitelem obou čísel $n(x,y)$ a x^2, plyne z dané rovnice, že číslo x také dělí číslo $4y$. Číslo $4y$ je tedy společný násobek čísel x a y, takže jejich *nejmenší* společný násobek $n(x,y)$ je dělitelem čísla $4y$ (a zároveň násobkem čísla y). Číslo $n(x,y)$ je tudíž rovno jednomu z čísel y, $2y$ nebo $4y$. Tyto tři případy, jež se pro přirozené y navzájem vylučují, nyní posoudíme odděleně.

(i) $n(x,y) = y$. Platí $y = kx$ pro vhodné přirozené k. Dosazením do rovnice dostaneme $x^2 = 4kx + 3kx$, odkud $x = 7k$, a proto $y = 7k^2$. Protože $n(7k, 7k^2) = 7k^2$ pro každé k, je odpovídající dvojice $(x,y) = (7k, 7k^2)$ skutečně řešení.

(ii) $n(x,y) = 2y$. Platí $2y = kx$ pro vhodné liché k (pro k sudé dostaneme, že x dělí y, což je případ (i)). Dosazením do rovnice dostaneme $x^2 = 2kx + 3kx$, odkud $x = 5k$, a proto $2y = 5k^2$. To je spor s tím, že k je liché.

(iii) $n(x,y) = 4y$. Platí $4y = kx$ pro vhodné liché k (pro k sudé dostaneme, že x dělí y nebo $2y$, což vede na případ (i) nebo (ii)). Dosazením do rovnice dostaneme $x^2 = kx + 3kx$, odkud $x = 4k$, a proto $y = k^2$. Protože $n(4k, k^2) = 4k^2$ pro každé liché k, je odpovídající dvojice $(x, y) = (4k, k^2)$ skutečně řešení.

Odpověď: Hledaných dvojic (x, y) je nekonečně mnoho; jsou to jednak dvojice $(7k, 7k^2)$, kde k je libovolné přirozené číslo, jednak dvojice $(4k, k^2)$, kde k je libovolné liché přirozené číslo.

Jiné řešení. Označme d největší společný dělitel hledaných čísel x a y. Potom $x = dx_1$ a $y = dy_1$, kde x_1 a y_1 jsou nesoudělná přirozená čísla, a $n(x, y) = dx_1y_1$. Po dosazení do dané rovnice dostaneme $d^2x_1^2 = 4dy_1 + 3dx_1y_1$, což po krácení číslem d přepíšeme do tvaru

$$x_1(dx_1 - 3y_1) = 4y_1. \tag{1}$$

Přirozené číslo $4y_1$ je tedy násobkem čísla x_1. Čísla x_1 a y_1 jsou ale nesoudělná, tudíž číslo x_1 je dělitelem čísla 4, a proto $x_1 \in \{1, 2, 4\}$.

Je-li $x_1 = 1$, pak z (1) vychází $d = 7y_1$, takže $x = dx_1 = 7y_1$ a $y = dy_1 = 7y_1^2$. Dvojice čísel $x = 7k$ a $y = 7k^2$ je řešením původní rovnice pro každé k.

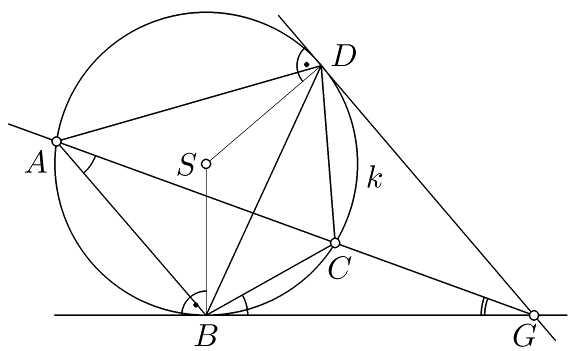
Je-li $x_1 = 2$, pak podle (1) platí $2d = 5y_1$, takže číslo y_1 je sudé stejně jako číslo x_1, což odporuje jejich předpokládané nesoudělnosti.

Je-li $x_1 = 4$, pak z (1) vychází $d = y_1$, takže $x = dx_1 = 4d$ a $y = dy_1 = d^2$. Čísla $x_1 = 4$ a $y_1 = d$ jsou ovšem nesoudělná, jenom když je d liché číslo. Pro každé takové d je dvojice $x = 4d$ a $y = d^2$ řešením původní rovnice.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při správném postupu s neúplnou diskusí či jinou odstranitelnou chybou a nalezení (nikoliv uhodnutí) pouze jedné z obou nekonečných skupin řešení udělte nejvýše 3 body. Za pouhé uhodnutí nekonečně mnoha řešení udělte 1 bod.

3. Protože úsečka BD není průměrem kružnice k, její tečny v bodech B a D nejsou rovnoběžné, takže se protínají v bodě, který označíme G.

(i) Předpokládejme, že bod G leží na přímce AC, například na polopřímce opačné k CA (obr. 1). (Leží-li bod G na polopřímce opačné k AC, vyměníme označení vrcholů A a C, které nic nemění na rovnosti, kterou máme dokázat.) Trojúhelníky ABG a BCG

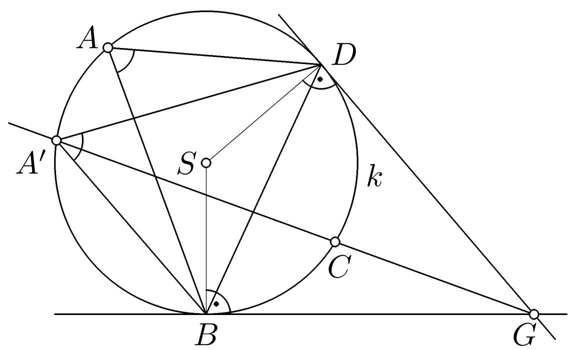


Obr. 1

se shodují jak ve vnitřních úhlech u společného vrcholu G, tak ve vnitřních úhlech BAG a CBG (podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu pro tětivu BC kružnice k). Proto jsou tyto trojúhelníky podobné, tudíž platí $|AB| : |BC| = |GB| : |GC|$. Analogická úměra

$|AD| : |CD| = |GD| : |GC|$ plyne z podobných trojúhelníků ADG a DCG. Porovnáme-li obě úměry a přihlédneme-li k rovnosti $|GB| = |GD|$ (úseky tečen z bodu G ke kružnici k), zjistíme, že platí $|AB| : |BC| = |AD| : |CD|$, odkud již plyne rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.

(ii) Předpokládejme nyní, že platí rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ a že bod G leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou BD jako bod C (jinak opět vyměníme označení bodů A a C, které přímka BD odděluje.) Pak polopřímka GC protíná kružnici k ve dvou bodech, v bodě C a v bodě, který označíme A' (obr. 2). Pro čtyřúhelník $A'BCD$ můžeme



Obr. 2

použít tvrzení dokázané v části (i), dostaneme tak rovnost $|A'B| \cdot |CD| = |A'D| \cdot |BC|$. Porovnáním s rovností $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ zjistíme, že platí $|A'B| : |AB| = |A'D| : |AD|$. Tato úměra spolu se shodností úhlů $BA'D$ a BAD (obvodové úhly nad tětivou BD kružnice k) znamená, že trojúhelníky $BA'D$ a BAD jsou podobné podle věty *sus*. Protože však straně BD odpovídá strana BD, jde o shodné trojúhelníky (ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou BD), tudíž body A a A' splývají. Bod G proto leží na přímce AC.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, po 3 bodech za každou z obou implikací dokázaných v částech (i) a (ii).

4. Odečtením prvních dvou rovnic soustavy dostaneme

$$x^2 - y^2 = p(y - x), \quad \text{neboli} \quad (x - y)(x + y + p) = 0.$$

Odtud plyne, že aspoň jeden z činitelů $(x - y)$ a $(x + y + p)$ je roven nule, takže číslo y je rovno x nebo $-p - x$. Obdobně odečtením první a třetí rovnice soustavy zjistíme, že rovněž $z \in \{x, -p - x\}$. Dohromady to znamená, že každé řešení (x, y, z) dané soustavy je (až na pořadí) trojice tvaru (u, u, u) nebo $(u, u, -p - u)$.

(i) Trojice (u, u, u) je řešením, právě když číslo u splňuje rovnici $u^2 - 1 = 2pu$. Její úpravou dostaneme $(u - p)^2 = p^2 + 1$, odkud je vidět, že pro každé reálné p existují dvě různá čísla u a jsou rovna $p \pm \sqrt{p^2 + 1}$. Jim odpovídají první dvě řešení původní soustavy

$$x_1 = y_1 = z_1 = p + \sqrt{p^2 + 1} \quad \text{a} \quad x_2 = y_2 = z_2 = p - \sqrt{p^2 + 1}. \tag{1}$$

(ii) Hledejme nyní všechna řešení soustavy tvaru $(u, u, -p-u)$. Snadno si uvědomíme, že trojice čísel $(u, u, -p-u)$ (v jakémkoliv pořadí) je řešením původní soustavy, právě když číslo u současně vyhovuje dvěma rovnicím

$$u^2 - 1 = p(u - p - u) \quad \text{a} \quad (-p - u)^2 - 1 = p(u + u).$$

Je zřejmé, že každá z těchto rovnic je ekvivalentní s rovnicí $u^2 = 1 - p^2$. Vidíme, že v případě $|p| > 1$ číslo u neexistuje, v případě $|p| = 1$ platí $u = 0$, konečně v případě $|p| < 1$ existují dvě čísla u a jsou rovna $\pm\sqrt{1 - p^2}$. Odpovídající řešení původní soustavy jsou dvě trojice čísel

$$\begin{aligned} x_3 = y_3 = \sqrt{1-p^2} \quad &\text{a} \quad z_3 = -p - \sqrt{1-p^2}, \\ x_4 = y_4 = -\sqrt{1-p^2} \quad &\text{a} \quad z_4 = -p + \sqrt{1-p^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

a dále všechny jejich permutace

$$\begin{aligned} (x_5, y_5, z_5) = (x_3, z_3, x_3), \quad (x_6, y_6, z_6) = (x_4, z_4, x_4), \\ (x_7, y_7, z_7) = (z_3, x_3, x_3), \quad (x_8, y_8, z_8) = (z_4, x_4, x_4). \end{aligned} \tag{3}$$

(Vzorce (2) a (3) můžeme použít i v případě $|p| = 1$, musíme však mít na paměti, že poskytují jen tři různá řešení, neboť třetí řešení splývá se čtvrtým, páté s šestým a sedmé s osmým.) Nyní ještě posoudíme, kdy některá řešení uvedená v (2) a (3) splývají s řešeními uvedenými v (1). Taková situace nastane, pokud platí $|p| \leqq 1$ a je splněna některá z rovnic

$$\sqrt{1-p^2} = -p - \sqrt{1-p^2} \quad \text{respektive} \quad -\sqrt{1-p^2} = -p + \sqrt{1-p^2}.$$

Snadným výpočtem zjistíme, že první rovnice má jediné řešení $p = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (pro takové p třetí, páté a sedmé řešení splývají s prvním řešením) a že druhá rovnice má jediné řešení $p = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (pro takové p čtvrté, šesté a osmé řešení splývají s druhým řešením).

Odpověď: Všechna řešení (x_i, y_i, z_i) dané soustavy rovnic jsou popsána vzorci (1), (2) a (3). Je-li $|p| > 1$, existují právě dvě různá řešení (s indexy $i = 1, 2$). Je-li $|p| < 1$ a $|p| \neq \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, existuje právě osm různých řešení (s indexy $i = 1, 2, \ldots, 8$). Je-li $|p| = 1$ nebo $|p| = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, existuje právě pět různých řešení (s indexy $i = 1, 2, 3, 5, 7$ pro hodnoty $p = 1$, $p = -1$, $p = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ a s indexy $i = 1, 2, 4, 6, 8$ pro $p = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za důkaz, že aspoň dvě z čísel x, y, z se rovnají, 1 bod za nalezení řešení (1), 1 bod za nalezení řešení (2), 1 bod za správné určení počtu řešení pro všechna $p \neq \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, 1 bod za diskusi případu $|p| = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Chybí-li nutná zkouška řešení (náš postup ji nevyžadoval), udělte nejvýše 5 bodů.