51. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie B

1. Najděte všechna přirozená čísla n, která jsou menší než 100 a mají tu vlastnost, že druhé mocniny čísel $7n + 5$ a $4n + 3$ končí stejným dvojčíslím.

2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 24xy &= 0,\\ \frac{12x}{x^2 + 1} + \frac{12y}{y^2 + 1} + 1 &= 0.\end{aligned}$$

3. Uvnitř stran AB, BC, CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K, L, M a N. Označme S průsečík přímek KM a LN. Je-li možno vepsat kružnice čtyřúhelníkům $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, je možno vepsat kružnici i čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte.

4. Je dáno n nezáporných čísel. Můžeme vybrat libovolná dvě z nich, řekněme a a b, $a \leqq b$, a zaměnit je čísly 0 a $b - a$. Dokažte, že opakováním této operace lze všechna daná čísla změnit na nuly, právě když původní čísla lze rozdělit do dvou skupin tak, že součty čísel v obou skupinách jsou stejné.

II. kolo kategorie B se koná

v úterý 26. března 2002

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Protože číslo $4n+3$ je liché, musí být liché i číslo $7n+5$, takže číslo n musí být sudé: $n=2k$ pro vhodné celé k.

Požadovanou vlastnost lze vyjádřit takto: rozdíl $D=(7n+5)^2-(4n+3)^2$ je dělitelný číslem 100. S využitím rozkladu

$$D=\big((7n+5)-(4n+3)\big)\big((7n+5)+(4n+3)\big)=(3n+2)(11n+8)$$

po dosazení $n=2k$ dostaneme vyjádření $D=4(3k+1)(11k+4)$. Zajímá nás tedy, kdy je součin $(3k+1)(11k+4)$ dělitelný číslem 25. Oba činitelé $3k+1$ a $11k+4$ nemohou být násobky pěti zároveň, protože pro jejich největší společný dělitel vychází

$$\mathrm{nsd}(11k+4,3k+1)=\mathrm{nsd}(3k+1,2k+1)=\mathrm{nsd}(2k+1,k)=\mathrm{nsd}(k,1)=1.$$

Zjistíme proto, kdy platí $25\mid 3k+1$ a kdy platí $25\mid 11k+4$. Z vyjádření

$$3k+1=3(k-8)+25 \quad \text{a} \quad 11k+4=11(k-11)+125$$

vidíme, že $25\mid 3k+1$, právě když $k=25t+8$, zatímco $25\mid 11k+4$, právě když $k=25t+11$ (písmeno t značí v obou případech celé číslo). Hledaná čísla $n=2k$ jsou proto čísla tvarů $n=50t+16$ a $n=50t+22$, v rozmezí od 1 do 99 jsou to tudíž právě čísla 16, 22, 66 a 72.

Jiné řešení. Nejprve zjistíme poslední číslice čísel $(7n+5)^2$ a $(4n+3)^2$ v závislosti na poslední číslici čísla n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7n+5$	5	2	9	6	3	0	7	4	1	8
$(7n+5)^2$	5	4	**1**	6	9	0	**9**	6	1	4
$4n+3$	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9
$(4n+3)^2$	9	9	**1**	5	1	9	**9**	1	5	1

(Výpočet celé tabulky se zkrátí na polovinu, když si předem jako v předchozím řešení uvědomíme, že n musí být sudé.) Vidíme, že čísla $(7n+5)^2$ a $(4n+3)^2$ končí stejnou číslicí, právě když číslo n končí číslicí 2 nebo 6. Každé hledané $n<100$ je tedy buď tvaru $n=10a+2$, nebo tvaru $n=10a+6$, kde a je neznámá číslice. I když by stačilo otestovat všech $2\cdot 10=20$ takových čísel n, zvolíme jiný postup.

(i) Pro $n=10a+2$ platí

$$\begin{aligned}(7n+5)^2&=(70a+19)^2=4\,900a^2+2\,660a+361,\\(4n+3)^2&=(40a+11)^2=1\,600a^2+880a+121.\end{aligned}$$

Vidíme, že číslo $(7n+5)^2$ má na místě desítek stejnou číslici, jakou má číslo $6a+6$ na místě jednotek; číslo $(4n+3)^2$ zase má na místě desítek stejnou číslici, jakou má číslo $8a+2$ na místě jednotek. Hledáme tedy číslice a, pro které rozdíl $(8a+2)-(6a+6)=2(a-2)$ končí číslicí nula; zřejmě to platí pouze pro $a = 2$ a $a = 7$, kterým odpovídají řešení $n = 22$ a $n = 72$.

(ii) Pro $n = 10a + 6$ platí

$$(7n + 5)^2 = (70a + 47)^2 = 4\,900a^2 + 6\,580a + 2\,209$$
$$(4n + 3)^2 = (40a + 27)^2 = 1\,600a^2 + 2\,160a + 729.$$

Tentokrát jsou počty desítek v těchto číslech stejné jako počty jednotek v číslech $8a$ a $6a+2$. Rozdíl $8a - (6a + 2) = 2(a - 1)$ končí číslicí nula jedině pro $a = 1$ a $a = 6$. Odpovídající řešení jsou $n = 16$ a $n = 66$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za poznatek, že číslo n končí číslicí 2 nebo 6, udělte 2 body.

2. Protože pro libovolná reálná čísla x, y jsou obě čísla $(x^2 + 1)$ a $(y^2 + 1)$ nenulová (totiž kladná), můžeme přejít k novým neznámým

$$u = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{a} \quad v = \frac{y}{y^2 + 1},$$

ve kterých má zřejmě původní soustava rovnic tvar

$$1 + 24uv = 0 \quad \text{a} \quad 12u + 12v + 1 = 0.$$

Odtud například pro neznámou u snadno dostaneme kvadratickou rovnici

$$24u^2 + 2u - 1 = 0$$

s kořeny $u_1 = \frac{1}{6}$ a $u_2 = -\frac{1}{4}$, kterým „symetricky“ odpovídají hodnoty $v_1 = -\frac{1}{4}$ a $v_2 = \frac{1}{6}$. Protože (kvadratické) rovnice

$$\frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{6} \quad \text{a} \quad \frac{t}{t^2 + 1} = -\frac{1}{4}$$

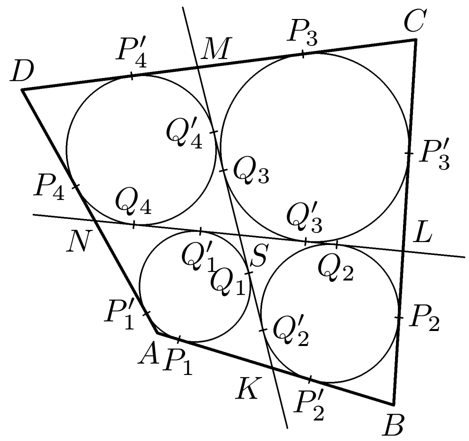
mají řešení

$$s_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8} \quad \text{a} \quad t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3},$$

má původní soustava právě osm řešení, a to dvojice tvaru $(x, y) = \left(3 \pm \sqrt{8}, -2 \pm \sqrt{3}\right)$ a $(x, y) = \left(-2 \pm \sqrt{3}, 3 \pm \sqrt{8}\right)$, kde znaménka jsou kombinována libovolně.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

3. Předpokládejme, že zmíněným čtyřem čtyřúhelníkům lze vepsat kružnice. Body dotyků těchto kružnic s příslušnými stranami čtyřúhelníků označme jako na obrázku. Ze sou-



měrnosti tečen sestrojených z jednoho bodu k téže kružnici plynou rovnosti

$$|AP_1| = |AP_1'|,\ |BP_2| = |BP_2'|,\ |CP_3| = |CP_3'|,\ |DP_4| = |DP_4'| \tag{1}$$

a

$$|SQ_1| = |SQ_1'|,\ |SQ_2| = |SQ_2'|,\ |SQ_3| = |SQ_3'|,\ |SQ_4| = |SQ_4'|. \tag{2}$$

Ze souměrnosti společných vnějších tečen dvou kružnic zase plynou rovnosti

$$|P_1P_2'| = |Q_1'Q_2|,\ |P_2P_3'| = |Q_2'Q_3|,\ |P_3P_4'| = |Q_3'Q_4|,\ |P_4P_1'| = |Q_4'Q_1|. \tag{3}$$

Podle známé poučky lze konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ vepsat kružnici, právě když délky jeho stran splňují podmínku

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|,$$

kterou lze s ohledem na (1) upravit do tvaru

$$|P_1P_2'| + |P_3P_4'| = |P_2P_3'| + |P_4P_1'|. \tag{4}$$

Všimněme si, že podle (2) a (3) platí rovnosti

$$\begin{aligned}
|P_1P_2'| &= |Q_1'Q_2| = |Q_1'S| + |SQ_2| = |SQ_1| + |SQ_2|,\\
|P_2P_3'| &= |Q_2'Q_3| = |Q_2'S| + |SQ_3| = |SQ_2| + |SQ_3|,\\
|P_3P_4'| &= |Q_3'Q_4| = |Q_3'S| + |SQ_4| = |SQ_3| + |SQ_4|,\\
|P_4P_1'| &= |Q_4'Q_1| = |Q_4'S| + |SQ_1| = |SQ_4| + |SQ_1|.
\end{aligned}$$

Obě strany (4) se tudíž rovnají součtu $|SQ_1| + |SQ_2| + |SQ_3| + |SQ_4|$ a důkaz je hotov.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

4. Poznamenejme nejdříve, že popsanou operaci nemá smysl provádět s dvojicí čísel (a, b) obsahující číslo nulu, neboť taková dvojice se operací nezmění.

(i) Předpokládejme nejdříve, že danou skupinu n nezáporných čísel lze rozdělit na dvě podskupiny A a B se stejným součtem čísel. Ukažme, že v tomto případě lze opakováním operace změnit všechna čísla obou skupin A a B na nuly. Obsahuje-li některá ze skupin A, B aspoň jedno kladné číslo (jinak jsme hotovi), plyne z rovnosti součtů čísel v obou skupinách, že kladné číslo existuje v obou z nich. Vyberme tedy kladné číslo $a \in A$ a kladné číslo $b \in B$ a proveďme operaci právě s těmito dvěma čísly. Je-li například $a \leqq b$ (v případě $a \geqq b$ je úvaha obdobná), změní se číslo a ve skupině A na nulu a číslo b ve skupině B na číslo $b - a$, takže se celkový součet čísel ve skupině A zmenší o a, stejně jako celkový součet čísel ve skupině B. Proto budou po provedené operaci součty čísel ve skupinách A a B opět stejné, přitom se celkový počet nul v $A \cup B$ zvětší o 1 (pokud bylo $a \neq b$) nebo o 2 (pokud bylo $a = b$). Opakováním popsané operace s kladnými čísly $a \in A$ a $b \in B$ se proto po konečném počtu kroků dostaneme do situace, kdy v žádné ze skupin A, B již nebude kladné číslo.

(ii) Předpokládejme nyní, že z dané n-tice nezáporných čísel jsme dostali vhodným opakováním operace n-tici složenou ze samých nul. Dokažme indukcí, že před provedením každé jednotlivé operace bylo možné aktuální n-tici čísel rozdělit na dvě podskupiny A a B se stejným součtem. Před provedením *poslední* operace musela mít aktuální n-tice čísel tvar $\{a, a, 0, 0, \ldots, 0\}$, takže vhodné rozdělení bylo $A = \{a\}$ a $B = \{a, 0, 0, \ldots, 0\}$. Předpokládejme nyní, že *po provedení* některé operace s čísly (a, b), $a \leqq b$, existovalo rozdělení čísel do podskupin A a B se stejným součtem, a ukažme, že i *před provedením* této operace takové rozdělení existovalo. Jistě můžeme předpokládat, že nová čísla 0 a $b-a$ nepatří do stejné z obou podskupin A a B (jinak přehodíme číslo 0 do druhé podskupiny, což nezmění součty čísel v podskupinách), nechť tedy například $0 \in A$ a $b - a \in B$. Potom číslo 0 v A zaměníme číslem a a číslo $b - a$ v B zaměníme číslem b; dostaneme tak vhodné rozdělení aktuálních čísel před uvažovanou operací.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 3 body za část (i) a 3 body za část (ii).