51. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie C

1. Určete počet dvojic (a, b) přirozených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pro které je součin ab dělitelný třemi.

2. Nechť kružnice sestrojené nad rameny lichoběžníku jako nad průměry mají vnější dotyk. Dokažte, že dotykový bod těchto kružnic leží na ose úhlu, který obě ramena lichoběžníku svírají.

3. Najděte všechna celá čísla x, pro která jsou obě čísla $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ prvočísla.

4. V rovině jsou dány body C, V, U takové, že $|CV| = 3\,\mathrm{cm}$, $|VU| = 3{,}5\,\mathrm{cm}$ a $|CU| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$. Sestrojte ostroúhlý trojúhelník ABC tak, aby byl V průsečík jeho výšek a bod U byl souměrně sdružený s bodem A podle středu kružnice opsané trojúhelníku ABC.

II. kolo kategorie C se koná

v úterý 26. března 2002

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Nejprve spočteme, kolik je všech dvojic čísel takových, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, a pak od tohoto počtu odečteme počet těch dvojic, pro něž součin ab není třemi dělitelný.

Označme C množinu všech přirozených čísel nejvýše rovných 86,

$$\mathsf{C} = \{1, 2, \dots, 86\}.$$

Množina C má celkem 86 prvků. Číslo a z ní můžeme vybrat 86 způsoby a ke každému takto vybranému číslu a existuje 85 čísel $b \in \mathsf{C}$ různých od a. Proto počet všech uspořádaných dvojic (a, b) přirozených čísel $(1 \leqq a \neq b \leqq 86)$ je roven $86 \cdot 85$. Tuto množinu můžeme rozdělit na páry uspořádaných dvojic (a, b) a (b, a), proto právě pro polovinu dvojic platí $a < b$ (druhou polovinu tvoří dvojice, v nichž $a > b$). Počet všech dvojic (a, b) přirozených čísel takových, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, je tedy roven $\frac{1}{2} \cdot 86 \cdot 85 = 3\,655$. (Je to zároveň počet všech *neuspořádaných* dvojic přirozených čísel z množiny C, což je kombinační číslo $\binom{86}{2} = 3\,655$.)

Součin ab je dělitelný třemi, právě když je aspoň jeden z činitelů a, b dělitelný třemi. Protože mezi čísly z množiny C je právě 28 čísel dělitelných třemi, je v C právě $86 - 28 = 58$ čísel, jež nejsou dělitelná třemi. Celkem tedy můžeme sestavit $\frac{1}{2} \cdot 58 \cdot 57 = 1\,653$ dvojic různých přirozených čísel (a, b) takových, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, a přitom součin ab není dělitelný třemi.

Počet všech dvojic (a, b) přirozených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pro které je součin ab dělitelný třemi, je roven $3\,655 - 1\,653 = 2\,002$.

Jiné řešení. Označme A, resp. B množinu všech těch dvojic (a, b) $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, ve kterých je číslo a, resp. b dělitelné třemi. Mezi čísly v množině $\mathsf{C} = \{1, 2, \dots, 86\}$ existuje 28 čísel dělitelných třemi (jsou to čísla $3, 6, 9, \dots, 84$). Ke každému číslu $a \in \mathsf{C}$ existuje $86 - a$ čísel $b \in \mathsf{C}$ takových, že $a < b$. Proto počet všech prvků množiny A je roven

$$\begin{aligned}
&(86 - 3) + (86 - 6) + (86 - 9) + \dots + (86 - 84) = \\
&\quad = 28 \cdot 86 - 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 28) = \\
&\quad = 28 \cdot 86 - 3 \cdot \frac{1}{2}\bigl((1 + 28) + (2 + 27) + (3 + 26) + \dots + (28 + 1)\bigr) = \\
&\quad = 28 \cdot 86 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 28 = 2\,408 - 1\,218 = 1\,190.
\end{aligned}$$

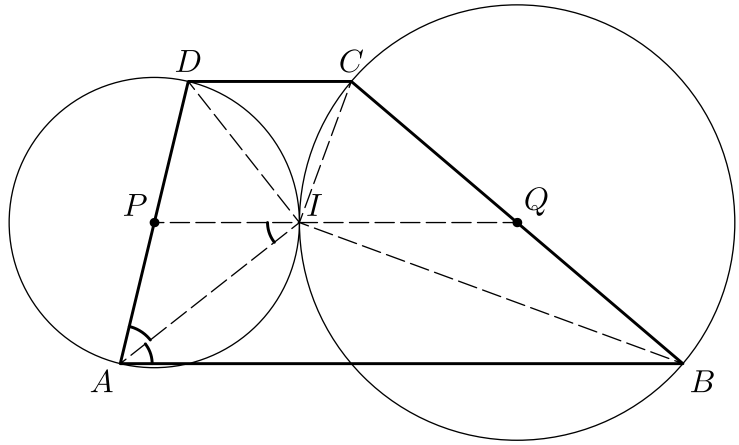
Ke každému číslu $b \in \mathsf{C}$ existuje $b - 1$ čísel $a \in \mathsf{C}$ takových, že $a < b$. Proto počet všech prvků množiny B je roven

$$\begin{aligned}
(3 - 1) + (6 - 1) + (9 - 1) + \dots + (84 - 1) &= 3 \cdot (1 + 2 + \dots + 28) - 28 = \\
&= 1\,218 - 28 = 1\,190.
\end{aligned}$$

Průnik množin A a B obsahuje takové dvojice čísel (a, b), v nichž jsou obě složky a i b dělitelné třemi, přičemž $a < b$. Těchto dvojic je podle úvahy z úvodního řešení $\frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 27 = 378$. Počet prvků sjednocení množin A a B, tj. počet všech dvojic (a, b) přirozených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pro které je součin ab dělitelný třemi, je roven součtu prvků množin A a B zmenšený o počet prvků jejich průniku, tj. $1\,190 + 1\,190 - 378 = 2\,002$.

Za úplné řešení je 6 bodů.

2. Nechť $ABCD$ je takový lichoběžník se základnami AB a CD (obr. 1). Označme P střed ramene AD, Q střed ramene BC a I dotykový bod kružnic sestrojených nad



Obr. 1

rameny jako průměry. Bod P je středem kružnice sestrojené nad ramenem AD, proto jsou úsečky PA a PI shodné a API je rovnoramenný trojúhelník se základnou AI. Odtud plyne, že úhly PAI a AIP jsou shodné. Protože bod dotyku dvou kružnic leží na středné těchto kružnic, je I bodem střední příčky PQ lichoběžníku $ABCD$, která je rovnoběžná s jeho základnami. Úhly PIA a IAB jsou střídavé a mají proto stejnou velikost. Tedy úhly PAI a IAB jsou shodné a AI je osou úhlu DAB. Bod I leží na ose tohoto úhlu, proto má stejnou vzdálenost od jeho ramen AD a AB. Podobně se ukáže, že IB je osou úhlu ABC a bod I má stejnou vzdálenost od přímek AB a BC. Odtud již plyne, že bod I má stejnou vzdálenost od ramen AD a BC, a leží proto na ose úhlu, který tato ramena svírají.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odhalení faktu, že I je bodem střední příčky, udělte 2 body.

3. Obě čísla 3 a 7 jsou lichá, proto pro libovolné celé číslo x mají čísla $x-3$ a $x-7$ (a tedy i čísla $(x-3)^2$ a $(x-7)^2$) stejnou paritu. Čísla -2 a 1 mají různou paritu, proto čísla $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ mají různou paritu, jedno z nich je tedy sudé. Protože jediné sudé prvočíslo je číslo 2, je jedno z čísel $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ rovno 2.

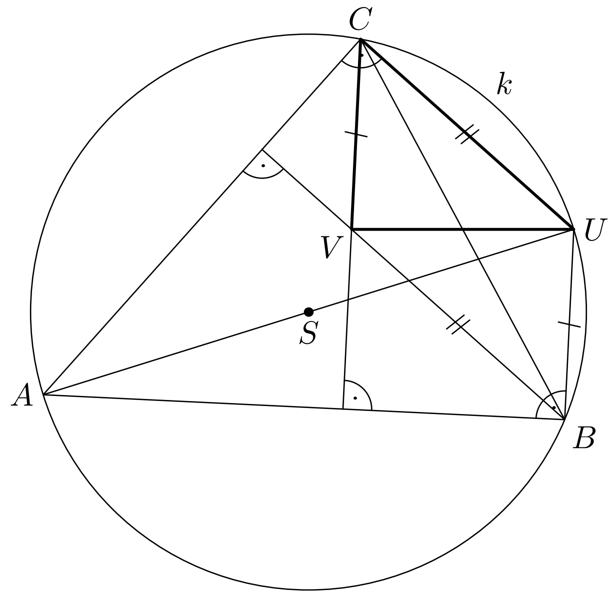
a) Nechť $(x-3)^2-2=2$. Potom $(x-3)^2=4$, tj. $x=5$ nebo $x=1$. Pro $x=5$ je hodnota výrazu $(x-7)^2+1$ rovna 5, což je prvočíslo, pro $x=1$ je hodnota tohoto výrazu rovna 37, což je také prvočíslo.

b) Nechť $(x-7)^2+1=2$. Potom $(x-7)^2=1$, tj. $x=8$ nebo $x=6$. Pro $x=8$ je hodnota výrazu $(x-3)^2-2$ rovna 23, což je prvočíslo, pro $x=6$ je hodnota tohoto výrazu rovna 7, což je také prvočíslo.

Hledanými celými čísly x jsou všechny prvky množiny $\{1,5,6,8\}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za poznatek, že zkoumaná čísla mají různou paritu, udělte 4 body, za diskusi každé z možností a) a b) udělte po jednom bodu.

4. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, S střed kružnice k jemu opsané a V průsečík jeho výšek (obr. 2). Nechť U je bod souměrně sdružený s bodem A podle S. Bod U leží na kružnici k uvnitř toho oblouku BC, který neobsahuje bod A. Úsečka AU je průměrem kružnice k, proto podle Thaletovy věty jsou úhly UCA a UBA pravé. Jelikož výška BV je kolmá na stranu AC trojúhelníku ABC, jsou úsečky BV a UC rovnoběžné. Z podobného důvodu jsou rovnoběžné i úsečky CV a UB, takže $BUCV$ je rovnoběžník. Úsečky BC a UV mají tudíž společný střed.



Obr. 2

Odtud již plyne konstrukce. Sestrojíme bod B souměrně sdružený s bodem C podle středu úsečky UV. Bod A pak určíme jako průsečík kolmice k přímce BU procházející bodem B a kolmice k přímce CU procházející bodem C.

Ukažme nyní, že takto sestrojený trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti. Bod B je sestrojen tak, že platí $BV \parallel UC$ a $CV \parallel UB$. Bod A je sestrojen tak, že platí $AB \perp UB$ a $AC \perp UC$, což znamená, že body B a C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AU. Body A a U jsou tudíž souměrně sdružené podle středu této kružnice, která je opsána trojúhelníku ABC. Ze vztahů $AC \perp UC$ a $BV \parallel UC$ plyne $BV \perp AC$, takže bod V leží na výšce z vrcholu B ke straně AC sestrojeného trojúhelníku. Podobně ze vztahů $AB \perp UB$ a $CV \parallel UB$ plyne, že bod V leží na výšce z vrcholu C ke straně AB. Bod V je tedy průsečík výšek trojúhelníku ABC.

Úloha má za daných podmínek právě jedno řešení.

Za úplné řešení včetně konstrukce udělte 6 bodů. Za důkaz toho, že $CVBU$ je rovnoběžník, udělte 3 body, 2 body za popis konstrukce a 1 bod za důkaz její správnosti.