1. *V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic*

$$
\begin{aligned}
(4x)_5 + 7y &= 14,\\
(2y)_5 - (3x)_7 &= 74,
\end{aligned}
$$

kde $(n)_k$ značí násobek čísla k nejbližší číslu n. *(P. Černek)*

Řešení. Z první rovnice dané soustavy plyne, že číslo $7y-14 = 7(y-2)$ je dělitelné pěti, takže $y = 5s+2$ pro vhodné celé s. Potom platí $2y = 10s+4$, a proto $(2y)_5 = 10s+5$. Po dosazení do soustavy dostaneme dvojici rovnic $(4x)_5 + 35s = 0$ a $10s - (3x)_7 = 69$. Odečteme-li od dvojnásobku první rovnice sedminásobek druhé rovnice, vyloučíme neznámou s a pro neznámou x tak dostaneme rovnici $2(4x)_5 + 7(3x)_7 = -483$. Protože funkce $F(t) = 2(4t)_5 + 7(3t)_7$ je v celočíselné proměnné t neklesající a platí $F(-18) = -532$, $F(-17) = -483$ a $F(-16) = -473$, má naše rovnice $F(x) = -483$ jediné řešení $x = -17$. Z rovnice $(4x)_5 + 35s = 0$ pak plyne $s = 2$, takže $y = 12$. Zkoušku pro dvojici $(x, y) = (-17, 12)$ provedeme snadno dosazením.

Daná soustava má jediné řešení $(x, y) = (-17, 12)$.

Jiné řešení. Pro každé celé číslo t zřejmě platí nerovnosti $t-2 \leqq (t)_5 \leqq t+2$ a $t-3 \leqq (t)_7 \leqq t+3$. Podle nich dostaneme z dané soustavy rovnic soustavu nerovnic

$$
\begin{aligned}
12 &\leqq 4x + 7y \leqq 16,\\
69 &\leqq 2y - 3x \leqq 79.
\end{aligned}
$$

Z této soustavy vyloučíme například neznámou x: pro výraz $3(4x+7y) + 4(2y-3x)$, který se rovná $29y$, tak dostaneme odhady

$$
29y \leqq 3\cdot 16 + 4\cdot 79 = 364 \quad \text{a} \quad 29y \geqq 3\cdot 12 + 4\cdot 69 = 312.
$$

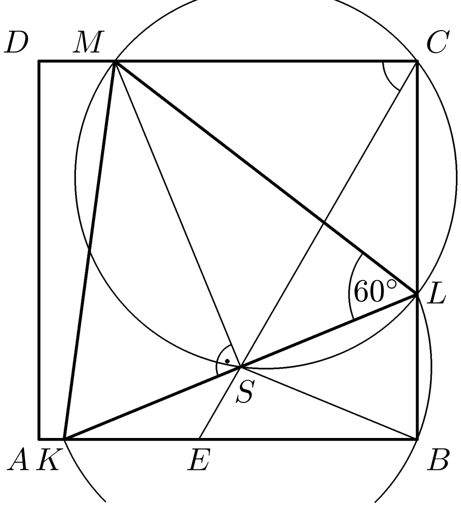
Z nerovností $312 \leqq 29y \leqq 364$ ovšem plyne $y \in \{11, 12\}$. Z první rovnice původní soustavy pro $y = 11$ vychází $(4x)_5 = -63$, což není násobek pěti, zatímco pro $y = 12$ vychází $(4x)_5 = -70$, odkud $-72 \leqq 4x \leqq -68$, takže $x \in \{-18, -17\}$. Nutně tedy platí $y = 12$; po dosazení do druhé rovnice soustavy zjistíme, že tato rovnice je splněna pro $x = -17$, ne však pro $x = -18$. Jediným řešením je tedy dvojice $(x, y) = (-17, 12)$.

2. *Uvažujme libovolný rovnostranný trojúhelník KLM, jehož vrcholy K, L a M leží po řadě na stranách AB, BC a CD daného čtverce $ABCD$. Najděte množinu středů stran KL všech takových trojúhelníků KLM.* *(J. Zhouf)*

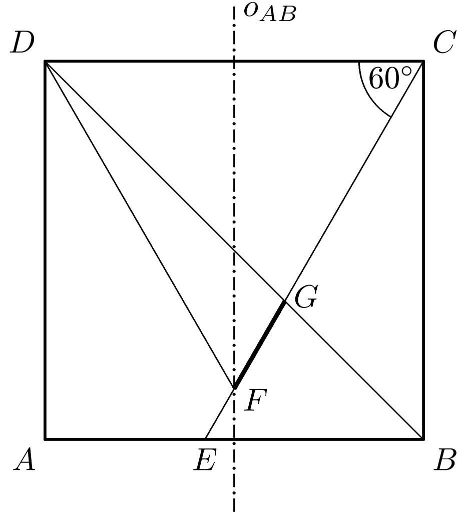
Řešení. Označme S střed strany KL libovolného z uvažovaných trojúhelníků KLM (obr. 1). Protože oba úhly LCM a LSM jsou pravé, je čtyřúhelník $CMSL$ tětivový, a proto platí $|\sphericalangle MCS| = |\sphericalangle MLS| = 60°$. Bod S tudíž leží na fixní úsečce CE, jejíž krajní bod $E \in AB$ je dán rovností $|\sphericalangle ECD| = 60°$. Ukážeme, že hledanou množinou všech středů S je jistá úsečka mezi body C a E, která je určena podmínkami $S \in CE$,

$$
\text{(i)} \quad |AS| \geqq |BS| \quad \text{a} \quad \text{(ii)} \quad |\sphericalangle CBS| \geqq 45°.
$$

Z těchto podmínek zřejmě plyne, že se jedná o úsečku FG, kde F je vrchol rovnostranného trojúhelníku CDF a G je ten bod strany CF, který leží na úhlopříčce BD, obr. 2.



Obr. 1



Obr. 2

Z bodů úsečky CE totiž podmínku (i) splňují právě body úsečky CF, podmínku (ii) právě body úsečky EG.

Zmíněné tvrzení dokážeme tak, že uvnitř úsečky CE zvolíme libovolný bod S a pokusíme se rekonstruovat vyhovující trojúhelník KLM, jehož strana KL má střed ve zvoleném bodě S. Zjistíme, že takový trojúhelník KLM existuje, právě když bod S splňuje obě podmínky (i) a (ii). Vraťme se znovu k obr. 1. Protože úhel KBL je pravý, jsou podle Thaletovy věty všechny tři úsečky SK, SB a SL shodné. Proto podle bodu S lze body K, L určit jako průsečíky úseček AB resp. BC s kružnicí o středu S a poloměru $|SB|$. Takový průsečík K ($K \neq B$) existuje, právě když platí podmínka (i), průsečík L ($L \neq B$) existuje, právě když platí nerovnost $|BS| \leqq |CS|$, neboli $|\sphericalangle BCS| \leqq |\sphericalangle CBS|$. Protože však $|\sphericalangle BCS| = 30°$, je poslední nerovnost zaručena silnější podmínkou (ii), jejíž nutnost se vyjeví za chvíli. Známe-li již body K a L, můžeme určit bod M jako průsečík strany CD s osou úsečky KL. Předpokládejme, že takový průsečík M existuje; sestrojený rovnoramenný trojúhelník KLM je pak skutečně rovnostranný, neboť čtyřúhelník $CMSL$ je tětivový (úhly u vrcholů C a S jsou pravé), a proto platí $|\sphericalangle MLS| = |\sphericalangle MCS| = 60°$. Zbývá proto posoudit, kdy existuje průsečík úsečky CD s osou úsečky KL, tedy kdy body C, D leží v opačných polorovinách určených zmíněnou osou, jež jsou popsány nerovnicemi $|KX| \leqq |LX|$ a $|KX| \geqq |LX|$. Protože platí $|KC| \geqq |BC|$ a $|BC| \geqq |LC|$, tedy $|KC| \geqq |LC|$, je naším úkolem zjistit, kdy je splněna nerovnost $|KD| \leqq |LD|$. Z pravoúhlých trojúhelníků KDA a LDC usoudíme, že poslední nerovnost platí, právě když $|AK| \leqq |LC|$, neboli $|KB| \geqq |LB|$, neboli $|\sphericalangle BLK| \geqq 45°$. Úhel BLK je ale shodný s úhlem CBS (víme totiž, že $|SB| = |SL|$), a tak dostáváme podmínku (ii). Důkaz je hotov.

---

3. *Dokažte, že dané přirozené číslo A je druhou mocninou některého přirozeného čísla, právě když pro každé přirozené n je aspoň jeden z rozdílů*

$$(A+1)^2 - A,\ (A+2)^2 - A,\ (A+3)^2 - A,\ \ldots,\ (A+n)^2 - A$$

dělitelný číslem n. *(P. Kaňovský)*

Řešení. (i) Předpokládejme nejprve, že $A = d^2$ pro některé přirozené d. Pak pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ platí $(A+j)^2 - A = (d^2+j)^2 - d^2 = (d^2-d+j)(d^2+d+j)$; protože jedno z n po sobě jdoucích čísel $(a^2 - a + j)$, kde $j = 1, 2, \ldots, n$, je dělitelné číslem n, je číslem n dělitelné i příslušné číslo $(A + j)^2 - A$.

(ii) Předpokládejme nyní, že číslo A není druhou mocninou žádného přirozeného čísla. V rozkladu čísla A na prvočinitele se pak některé prvočíslo p vyskytuje v lichém počtu exemplářů, tedy $p^{2k-1} \mid A$ a $p^{2k} \nmid A$ pro vhodné přirozené k. Ukažme, že například číslo $n = p^{2k}$ nemá vlastnost z textu úlohy. Připusťme naopak, že pro některé $j = 1, 2, \ldots, p^{2k}$ je rozdíl $(A + j)^2 - A$ dělitelný číslem p^{2k}. Čísla $(A + j)^2$ a A pak dávají stejné zbytky při dělení číslem p^{2k}, a tedy i při dělení číslem p^{2k-1}. Protože číslo A je dělitelné číslem p^{2k-1}, ne však číslem p^{2k}, platí totéž i o číslu $(A + j)^2$. To je ale spor, neboť $(A + j)^2$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

---

4. *Najděte všechny dvojice reálných čísel a, b, pro které má rovnice*

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

v oboru reálných čísel právě dvě řešení, přičemž jejich součet je 12. (P. Černek)

Řešení. Po vynásobení obou stran rovnice výrazem $x^2 - 1$ (který je roven nule, právě když $x \in \{-1, 1\}$) a po převedení všech členů na jednu stranu dostaneme kubickou rovnici

$$x^3 - ax^2 + 23x - b = 0. \tag{1}$$

Jak dobře víme, každá kubická rovnice s reálnými koeficienty má v oboru reálných čísel buď *jeden*, nebo *tři* kořeny (počítáme-li je s přihlédnutím k jejich násobnosti). Protože obě řešení původní rovnice jsou kořeny rovnice (1), musí mít tato rovnice *tři* reálné kořeny. Pro tato čísla x_1, x_2, x_3 a pro koeficienty rovnice (1) platí známé Viètovy vzorce

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 23, \\ x_1x_2x_3 &= b. \end{aligned} \tag{2}$$

Abychom se dále vyhnuli některým zkouškám, připomeňme známý fakt, že *každé* řešení soustavy rovnic (2) je tvořeno trojicí kořenů rovnice (1), všechna řešení (2) jsou tedy permutace téže trojice čísel.

Předpoklad o dvou řešeních původní rovnice znamená, že buď právě jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 patří do množiny $\{-1, 1\}$ a ostatní dva kořeny jsou různé, nebo je jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 dvojnásobný a žádný z nich do množiny $\{-1, 1\}$ nepatří. Řešení původní rovnice lze proto označit s a $12 - s$ tak, že nastane jedna z následujících možností: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$, nebo $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$; vždy přitom platí $s \notin \{-1, 1, 6, 11, 13\}$. Vyjmenované možnosti teď jednotlivě posoudíme.

(i) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = 11, \quad s^2 - 12s - 35 = 0, \quad b = -s(12 - s).$$

Druhá rovnice má dva kořeny $s = 5$ a $s = 7$, kterým podle třetí rovnice odpovídá stejná hodnota $b = -35$. Dvojice $(a, b) = (11, -35)$ je řešením úlohy.

(ii) $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = 13, \quad s^2 - 12s + 11 = 0, \quad b = s(12 - s).$$

Druhá rovnice má kořeny $s = 1$ a $s = 11$, které však patří k nepřípustným hodnotám s (viz výše).

(iii) $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$. Soustava (2) má po dosazení a úpravě tvar

$$a = s + 12, \quad s^2 - 24s + 23 = 0, \quad b = s^2(12 - s).$$

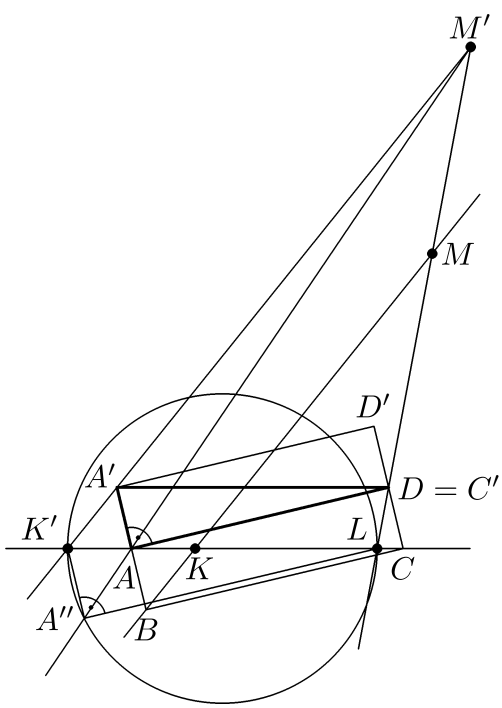
Druhá rovnice má kořeny $s = 1$ a $s = 23$. Hodnota $s = 1$ je nepřípustná, hodnotě $s = 23$ podle první a třetí rovnice odpovídají hodnoty $a = 35$ a $b = -11 \cdot 23^2 = -5\,819$. Dvojice $(a, b) = (35, -5\,819)$ je řešením úlohy.

Hledané dvojice (a, b) jsou dvojice $(11, -35)$ a $(35, -5\,819)$.

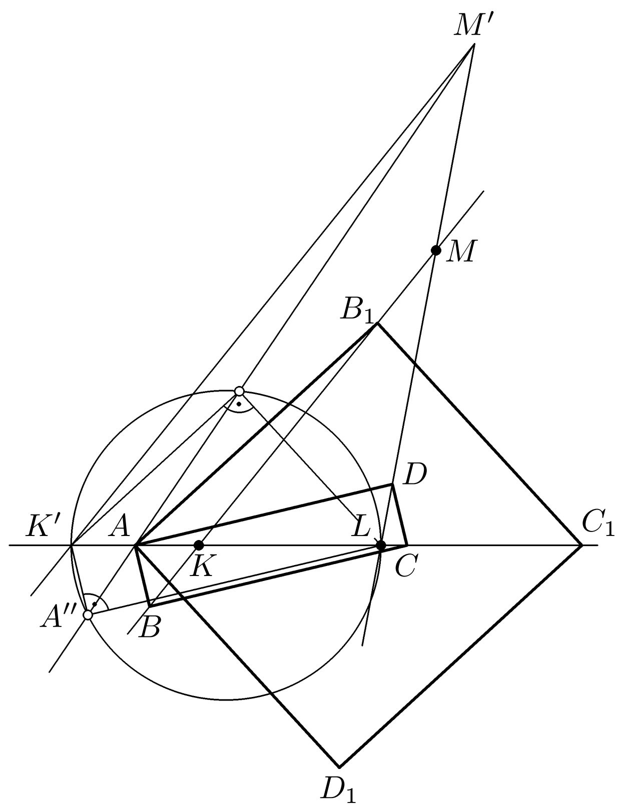
---

5. *V rovině je dán trojúhelník KLM a bod A ležící na polopřímce opačné k polopřímce KL. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$, jehož vrcholy B, C a D leží po řadě na přímkách KM, KL a LM.* *(P. Calábek)*

Řešení. Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný pravoúhelník, a označme $A'B'C'D'$ jeho obraz v posunutí o vektor $\boldsymbol{BA}$ (obr. 3, $B' = A$). Bod A' leží na přímce souměrně sdružené s přímkou KM podle středu A — odpovídající průsečíky této přímky s přímkami LK a LM označme K' a M'. Protože úhlopříčka AC hledaného pravoúhelníku leží na přímce KL, je úhlopříčka $A'C'$ posunutého obdélníku $A'B'C'D'$ s KL rovnoběžná. Ve stejnolehlosti se středem M', která převádí bod A' do bodu K' (a bod $C' = D$ do bodu L) odpovídá pravoúhlému trojúhelníku $A'AC'$ trojúhelník $K'A''L$. Bod A'' už dovedeme sestrojit, protože leží na Thaletově kružnici nad průměrem $K'L$ a na přímce $M'A$. Nyní již snadno sestrojíme hledaný pravoúhelník $ABCD$: nejprve určíme body A' a $C' = D$, které jsou obrazy bodů K' a L ve stejnolehlosti se středem M', jež převádí bod A'' do bodu A, a k nim doplníme vrcholy B a C jako obrazy bodů $B' = A$, $C' = D$ v posunutí o vektor $\boldsymbol{A'A} = \boldsymbol{AB}$.



Obr. 3



Obr. 4

Protože bod A leží uvnitř úsečky $K'L$ a $M' \neq A$, protíná přímka $M'A$ Thaletovu kružnici nad průměrem $K'L$ vždy ve dvou bodech. Jim odpovídají dvě různá řešení $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 4). Úloha má vždy dvě řešení.

---

6. *Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnost*

$$f\big(xf(y)\big) = f(xy) + x.$$

(P. Kaňovský)

Řešení. Dosadíme-li do dané rovnice za x hodnotu $f(x)$, dostaneme rovnici

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f\big(f(x)y\big) + f(x),$$

ze které vyjádříme $f\big(f(x)y\big) = f\big(f(x)f(y)\big) - f(x)$. Jiné vyjádření téhož výrazu $f\big(f(x)y\big)$ dostaneme, když v původní rovnici vyměníme navzájem hodnoty x a y; vyjde nám $f\big(f(x)y\big) = f(yx) + y$. Porovnáním obou vyjádření tak dostaneme rovnici

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f(yx) + y + f(x),$$

jejíž levá strana se nezmění, vyměníme-li navzájem hodnoty x a y. Stejnou vlastnost musí proto mít i pravá strana této rovnice, takže musí platit

$$f(yx) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y), \quad \text{neboli} \quad y + f(x) = x + f(y).$$

Další zřejmou úpravou dostáváme rovnici $f(x) - x = f(y) - y$, která musí být splněna pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$. Znamená to, že funkce $x \mapsto f(x) - x$ je na množině $\mathbb{R}^+$ konstantní, tedy hledaná funkce f musí být tvaru $f(x) = x + c$ pro vhodné číslo c. Po dosazení tohoto předpisu do obou stran původní rovnice

$$f\big(xf(y)\big) = xf(y) + c = x(y + c) + c = xy + cx + c$$
$$f(xy) + x = (xy + c) + x = xy + x + c$$

zjišťujeme, že vyhovuje jedině $c = 1$. Hledaná funkce f je tudíž jediná a je určena vzorcem $f(x) = x + 1$.