52. ročník Matematické olympiády
Úlohy I. kola (domácí část)

KATEGORIE A

A–I–1

Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ celých čísel s prvním členem $x_1 = 1$ splňuje podmínku

$$x_n = \pm x_{n-1} \pm \cdots \pm x_1$$

s vhodnou volbou znamének „+“ a „−“ pro libovolné $n > 1$, například $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_2 + x_1$, $x_4 = x_3 - x_2 - x_1, \ldots$. Pro dané n určete všechny možné hodnoty x_n.

J. Földes

A–I–2

Na přímce p jsou dány různé body A, B, C v tomto pořadí, kde $|AB| = 1$ a $|BC| = h$. Uvažujme kružnice k_A, k_B, k_C, které se dotýkají přímky p po řadě v bodech A, B, C. Kružnice k_A, k_B mají přitom vnější dotyk v bodě P a kružnice k_B, k_C vnější dotyk v bodě Q. Určete všechny hodnoty poloměru kružnice k_B pro něž je trojúhelník BPQ rovnoramenný.

J. Zhouf

A–I–3

Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníku.

P. Kaňovský

A–I–4

Určete všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že v některé číselné soustavě o základu $z \geq 5$ platí následující kriterium dělitelnosti:

Trojmístné číslo $(abc)_z$ je dělitelné číslem n, právě když je číslem n dělitelné číslo $c + 3b - 4a$.

P. Černek

A–I–5

V rovině jsou dány tři různé body K, L, M, které v tomto pořadí leží na přímce. V této rovině najděte množinu všech vrcholů C čtverců $ABCD$ takových, že bod K leží na straně AB, bod L na úhlopříčce BD a bod M na straně CD.

J. Šimša

A–I–6

Hráči A a B hrají na desce složené ze šesti polí očíslovaných $1, 2, \ldots, 6$ následující hru. Na počátku je umístěna na pole s číslem 2 figurka a pak se hází běžnou hrací kostkou. Padne-li číslo dělitelné třemi posune se figurka na pole s číslem o jedna menším, jinak na pole s číslem o jedna větším. Hra končí vítězstvím hráče A resp. B, dostane-li se figurka na pole s číslem 1 resp. 6. S jakou pravděpodobností zvítězí hráč A?

P. Černek

KATEGORIE B

B–I–1

Palindromem rozumíme přirozené číslo, které se čte zepředu i zezadu stejně, např. 16261. Najděte největší čtyřmístný palindrom, jehož druhá mocnina je také palindromem.

E. Kováč

B–I–2

Najděte všechny trojice reálných čísel (x, y, z) vyhovující soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 9z^3\,, \\ x^2y + y^2x &= 6z^3\,. \end{aligned}$$

J. Zhouf

B–I–3

Je dán trojúhelník se stranami délek a, b, c a obsahem S. Dokažte, že rovnost $2c^2 = |a^2 - b^2|$ platí, právě když existuje trojúhelník se stranami délek a, b, $2c$ a obsahem $2S$.

P. Černek

B–I–4

Krokem budeme rozumět nahrazení uspořádané trojice (p, q, r) celých čísel trojicí $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Rozhodněte, zda existuje celé číslo k, že z trojice $(1, 3, 7)$ vznikne po konečném počtu kroků trojice $(k, k + 1, k + 2)$.

P. Černek

B–I–5

V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Kružnice k_1 sestrojená nad stranou AD jako průměrem a kružnice k_2, která prochází vrcholy B, C a dotýká se přímky AB, mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte, že úhly CPD a ABC jsou shodné.

J. Švrček

B–I–6

V kartézské soustavě souřadnic $0uv$ znázorněte množinu všech bodů $[u,v]$, kde $u>0$, pro něž má rovnice

$$|x^2-ux|+vx-1=0$$

s neznámou x právě tři různá reálná řešení.

J. Šimša

KATEGORIE C

C–I–1

Z pěti jedniček, pěti dvojek, pěti trojek, pěti čtyřek a pěti pětek sestavte pět navzájem různých pětimístných čísel tak, aby jejich součet byl co největší.

J. Šimša

C–I–2

Je dán trojúhelník ABC s ostrými vnitřními úhly při vrcholech A a B. Označme Q průsečík těžnice AD s výškou CP a E patu kolmice z bodu D na stranu AB. Dále nechť R je bod na polopřímce opačné k PC takový, že $|PR|=|CQ|$. Dokažte, že přímky AD a RE jsou různoběžné a že jejich průsečík leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B.

J. Švrček

C–I–3

Předpokládejme, že každá ze dvou bank A a B bude mít po následující dva roky stálou roční úrokovou míru. Kdybychom uložili $5/6$ našich úspor u banky A a zbytek u banky B, vzrostly by naše úspory po jednom roce na 67 000 Kč a po dvou letech na 74 900 Kč. Kdybychom však uložili $5/6$ našich úspor u banky B a zbytek u banky A, vzrostly by naše úspory po jednom roce na 71 000 Kč. Na jakou částku by se v takovém případě naše úspory zvýšily po dvou letech?

J. Šimša

C–I–4

Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s výškou 3 cm a shodnými stranami BC, CD a DA, pro který platí: Na základně AB existuje takový bod E, že úsečka DE má délku 5 cm a dělí lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy.

E. Kováč

C–I–5

K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli čtyřmístné přirozené číslo n. Získali jsme čtyřmístné číslo s opačným pořadím číslic než má číslo n. Určete všechny takové dvojice čísel m a n.

J. Zhouf

C–I–6

V rovině je dána přímka p a kružnice k. Sestrojte takový trojúhelník ABC, aby k byla kružnicí jemu vepsanou, její střed ležel v jedné čtvrtině jeho těžnice na stranu AB a aby vrchol C ležel na přímce p. Proveďte diskusi o počtu řešení v závislosti na vzájemné poloze přímky p a kružnice k.

P. Černek