Úlohy domácího kola kategorie A

1. *Posloupnost* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *celých čísel s prvním členem* $x_1 = 1$ *splňuje podmínku*

$$x_n = \pm x_{n-1} \pm \ldots \pm x_1$$

s vhodnou volbou znamének „+“ a „−“ pro libovolné $n > 1$, *například* $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_2 + x_1$, $x_4 = x_3 - x_2 - x_1$, … *Pro dané* n *určete všechny možné hodnoty* x_n.

Řešení. Vypišme, jaké hodnoty mohou nabývat první členy uvedené posloupnosti. Dostaneme

$$x_1 = 1, \quad x_2 \in \{-1, 1\}, \quad x_3 \in \{-2, 0, 2\}, \quad x_4 \in \{-4, -2, 0, 2, 4\},$$
$$x_5 \in \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Všimněme si, že všechny členy, které jsme vypsali, jsou celá čísla. Dále je zřejmé, že pro $i > 2$ je každý člen x_i sudé číslo. (Další pozorování je, že pokud najdeme posloupnost, pro kterou $x_i = a$ pro nějaké číslo a a dané $i > 1$, tak existuje i posloupnost, pro kterou $x_i = -a$.)

Zjistěme, jakou největší a jakou nejmenší hodnotu může nabývat číslo x_n (v závislosti na n). Označme a_i největší hodnotu, kterou může nabývat člen x_i. Protože posloupností délky i splňujících dané vlastnosti je jen konečný počet, maximum a_i existuje a je zřejmě kladné. K číslu a_i musí pro každé $i > 1$ existovat posloupnost $x_1, \ldots, x_{i-1}$, pro kterou platí

$$a_i = \pm x_{i-1} \pm \ldots \pm x_1 \leqq |x_{i-1}| + \ldots + |x_1| \leqq a_{i-1} + \ldots + a_1. \tag{1}$$

Víme, že $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Pomocí předcházejícího vzorce dokažme, že $a_i = 2^{i-2}$ pro každé $i > 1$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k i.

1. Tvrzení platí pro $i = 1$ ($a_1 = 1$) a $i = 2$ ($a_2 = 1$).

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé k, $2 \leqq k \leqq i-1$, a dokažme, že tvrzení platí i pro $k = i$. Z odhadu (1), indukčního předpokladu a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme

$$a_i \leqq a_{i-1} + \ldots + a_1 = 2^{i-3} + \ldots + 2 + 1 + 1 = \frac{2^{i-2} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{i-2}.$$

Uvažujme posloupnost $x_1 = 1$ a $x_i = x_{i-1} + \ldots + x_1$ pro každé $i > 1$. V tomto případě bude podle předchozího platit $x_i = 2^{i-2}$, takže $a_i = 2^{i-2}$ pro každé $i > 1$.

Podobně dokážeme, že nejmenší hodnota, jaké může x_n nabýt, je -2^{n-2}.

Zjistili jsme, že pro každé $n > 1$ leží člen x_n libovolné uvažované posloupnosti v množině $\{-2^{n-2}, -2^{n-2}+2, -2^{n-2}+4, \dots, 2^{n-2}\}$, kterou označíme M_n. Dokažme nakonec, že x_n může pro $n > 1$ nabývat libovolnou hodnotu z množiny M_n.

Volme znaménka následujícím způsobem: $x_i = x_{i-1} + \ldots + x_1$ pro $i < n$. Pro takovou posloupnost platí $x_i = 2^{i-2}$ pro $1 < i < n$. Dokažme, že v rovnosti $x_n = \pm 2^{n-3} \pm 2^{n-2} \pm \pm \ldots \pm 1 \pm 1$ lze znaménka vybrat tak, aby se hodnota x_n rovnala libovolně zvolenému číslu z množiny M_n.

Důkaz provedeme opět matematickou indukcí.

1. Tvrzení platí pro $n = 2$ ($-1 = -x_1$ a $1 = +x_1$, neboť $x_1 = 1$) a $n = 3$ ($-2 = -1-1$, $0 = -1+1$, $2 = 1+1$).

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \leqq n-1$, kde $n \geqq 4$. Dokažme tvrzení pro $k = n$. Zvolme libovolné číslo a z množiny M_n. Dokážeme, že existuje taková volba znamének + a −, že $a = \pm 2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$. Rozeberme dvě možnosti.

1. $a \geqq 0$. Protože $a \in \mathsf{M}_n$, je $a - 2^{n-3}$ sudé celé číslo z intervalu $\langle -2^{n-3}, 2^{n-3} \rangle$, a tedy $a - 2^{n-3} \in \mathsf{M}_{n-1}$. Z indukčního předpokladu plyne, že existuje volba znamének + a − taková, že $a - 2^{n-3} = \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$. Potom $a = 2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$, což jsme chtěli dokázat.

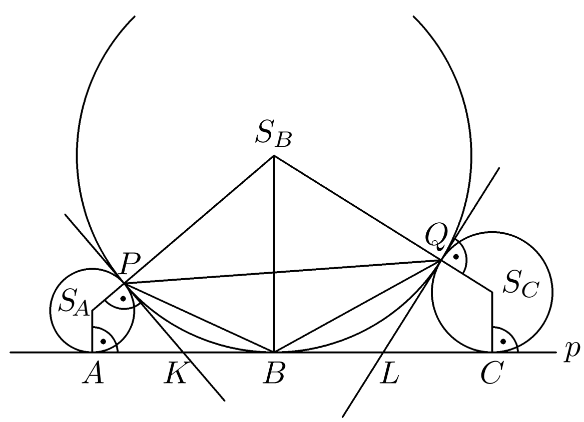
2. $a < 0$. Podobně jako v předcházejícím případě dokážeme, že a se dá napsat ve tvaru $a = -2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$.

Tím jsme dokázali, že všechny hodnoty x_n tvoří právě množinu M_n.

2. *Na přímce p jsou dány různé body A, B, C v tomto pořadí, kde $|AB| = 1$ a $|BC| = h$. Uvažujme kružnice k_A, k_B, k_C, které se dotýkají přímky p po řadě v bodech A, B, C. Kružnice k_A, k_B mají přitom vnější dotyk v bodě P a kružnice k_B, k_C vnější dotyk v bodě Q. Určete všechny hodnoty poloměru kružnice k_B, pro něž je trojúhelník BPQ rovnoramenný.*

Řešení. Je jasné, že zvolíme-li velikost $r_B > 0$ poloměru kružnice k_B, jsou už tím obě další kružnice k_A, k_C určeny. K jejich sestrojení využijeme základní vlastnosti tečen kružnic.

Předpokládejme, že kružnice k_A, k_B, k_C mají vlastnosti popsané v zadání. Označíme-li např. K průsečík vnitřní společné tečny kružnic k_A a k_B (v bodě P jejich vnějšího dotyku) s přímkou p, která je společnou vnější tečnou všech tří kružnic, musí být $|KA| = |KP|$ a $|KB| = |KP|$ (obr. 1). To znamená, že bod K je středem úsečky AB a zároveň bod P leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB. Známe-li bod P, snadno už sestrojíme kružnici k_A, o níž víme, že se dotýká přímky p v bodě A. Analogicky sestrojíme kružnici k_C.

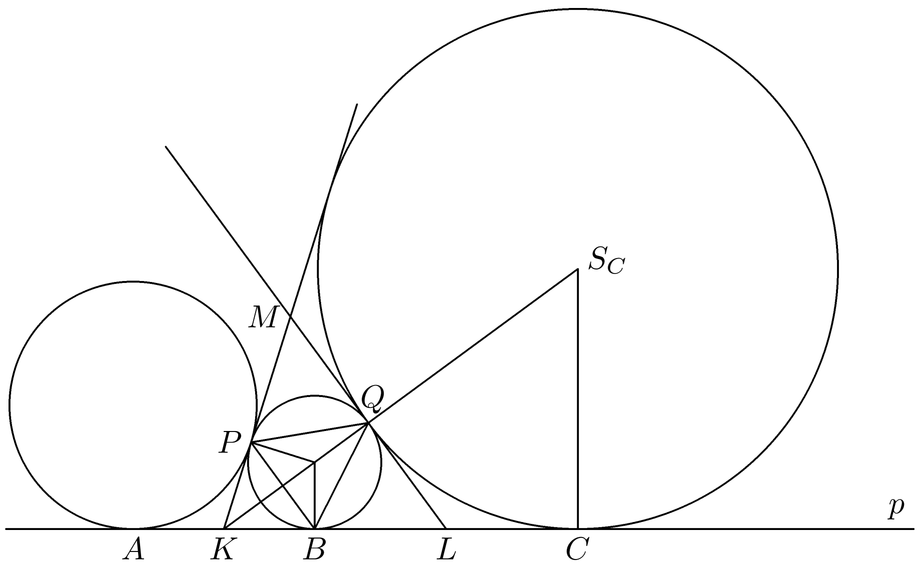


Obr. 1

Máme zjistit, pro které hodnoty r_B je trojúhelník BPQ rovnoramenný. Protože body dotyku P, Q kružnice k_B s oběma sousedními kružnicemi leží uvnitř opačných polorovin určených přímkou BS_B, jsou oba úhly BPQ a BQP ostré (příslušné středové úhly jsou menší než $180°$). Pokud tedy náhodou vyjde trojúhelník PBQ tupoúhlý, může být rovnoramenný, jen když $|BP| = |BQ|$. V takovém případě je ale ze souměrnosti zřejmé, že $|AB| = |BC|$, tj. $h = 1$. Trojúhelník BPQ je pak rovnoramenný pro každé $r_B > 0$.

Předpokládejme dále, že $h \neq 1$. V takovém případě můžeme předpokládat, že trojúhelník BPQ je ostroúhlý (jinak podle předchozího odstavce nemůže být rovnoramenný). Je-li rovnoramenný, je buď $|PQ| = |BQ|$, anebo $|PQ| = |BP|$. Předpokládejme, že je např. $|PQ| = |BQ|$ (jak ukážeme později, druhý případ lze řešit využitím souměrnosti).

Trojúhelník BPQ je souměrný podle spojnice S_BS_C středů obou kružnic, která prochází bodem dotyku Q obou kružnic a průsečíkem K tečen KB, KP. Označme ještě L průsečík společné vnitřní tečny kružnic k_C a k_B s přímkou p (L je střed úsečky BC, obr. 2) a M průsečík obou tečen KP a LQ (ten je obrazem bodu L v uvedené osové



Obr. 2

souměrnosti). Trojúhelník KLM je tedy rovnoramenný se stranami $|KL| = |KM| = \frac{1}{2}(1+h)$, $|ML| = 2|LQ| = h$, jeho obvod je $1 + 2h$. Velikost poloměru r_B vepsané kružnice spočteme pomocí obsahu: Pro obsah S trojúhelníku KLM platí

$$S = \frac{1}{2}h\sqrt{\left(\frac{1+h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}h\sqrt{1+2h}$$

a zároveň

$$S = \frac{1}{2}r_B(1+2h).$$

Odtud vychází

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+1}}. \qquad (1)$$

Naopak je-li r_B dáno vztahem (1), můžeme sestrojit rovnoramenný trojúhelník KLM s rameny KL a KM délky $\frac{1}{2}(1+h)$ a základnou ML, $|ML| = h$, přičemž jeho vepsaná kružnice k_B se bude dotýkat ramene KL v bodě B. Označme P, Q po řadě body dotyku kružnice k_B se stranami KM a LM. Protože K je střed úsečky AB, je $|KA| = |KB| = |KP|$. To znamená, že kružnice k_A dotýkající se přímky p v bodě A a procházející bodem P se bude dotýkat kružnice k_B v bodě P. Analogicky sestrojíme i kružnici k_C dotýkající se přímky p v bodě C a procházející bodem Q. Ze souměrnosti trojúhelníku KLM podle přímky KQ plyne, že $|PQ| = |BQ|$. Tím je první případ vyřešen.

V případě rovnosti $|PQ| = |BP|$ můžeme postupovat úplně stejně. Jednodušší však bude, když změníme měřítko původního obrázku v poměru $1 : h$, takže bude $|AB| = h' = 1/h$, $|BC| = 1$. Když navíc prohodíme označení bodů A a C, tak se z rovnosti $|BP| = |PQ|$ stane rovnost $|BQ| = |PQ|$. Podle předchozího pak pro velikost poloměru $r'_B = (1/h)r_B$ dostaneme

$$\frac{1}{h}r_B = r'_B = \frac{h'}{2\sqrt{2h'+1}} = \frac{\frac{1}{h}}{2\sqrt{2\frac{1}{h}+1}},$$

tj.

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+h^2}}. \tag{2}$$

Anebo jsme mohli řešit úlohu poněkud obecněji za předpokladu $|AB| = a$, $|BC| = b$, pak bychom místo vztahu (1) dostali

$$r_B = \frac{b\sqrt{a^2+2ab}}{2(a+2b)}. \tag{1'}$$

Pro $a = 1$, $b = h$ vyjde za předpokladu $|PQ| = |BQ|$ původní vztah (1), zatímco pro $|PQ| = |BP|$ prohodíme označení bodů A, C (a tím i bodů P, Q) a do vzorce (1′) dosadíme $a = h$, $b = 1$. Dostaneme tak vztah (2).

Závěr: Pro $h = 1$ je trojúhelník BPQ rovnoramenný pro libovolné $r_B > 0$. Pro $h \neq 1$ je trojúhelník BPQ rovnoramenný pro r_B určené vztahem (1) ($|PQ| = |BQ|$) nebo pro r_B určené vztahem (2) ($|PQ| = |BP|$).

3. *Určete všechny možné hodnoty výrazu*

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2},$$

kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníku.

Řešení. Nejdříve ukážeme, že žádná hodnota zkoumaného výrazu V není menší než 1. Použijeme nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem ($x + y \geqq 2\sqrt{xy}$) pro všechny dvojice kladných čísel x, y z množiny $\{a^4, b^4, c^4\}$:

$$V = \frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(a^4+b^4)+(b^4+c^4)+(c^4+a^4)}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} = 1.$$

Nyní ukážeme, že každá hodnota V je menší než 2. Z *Heronova vzorce* pro obsah S trojúhelníka se stranami a, b, c víme, že $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Po dosazení za s a roznásobení dostaneme

$$0 < S^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2,$$

odtud

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \qquad \text{tj.} \qquad \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} < 2.$$

Shrňme výsledek úvah prvních dvou odstavců: zjistili jsme, že $V \in \langle 1, 2)$. Ukažme, že všechny hodnoty V zaplní celý interval $V \in \langle 1, 2)$. Zvolíme libovolnou hodnotu $k \in \langle 1, 2)$ a najdeme trojúhelník, pro který má výraz V hodnotu k. Uvažujme trojúhelník se stranami a, 1, 1, který podle trojúhelníkové nerovnosti existuje, právě když $0 < a < 2$. Zjistíme, pro které a je $V = k$, proto vyřešíme rovnici

$$\frac{a^4 + 2}{2a^2 + 1} = k \tag{1}$$

s neznámou a. Po substituci $a^2 = b$ dostaneme kvadratickou rovnici $b^2 - 2kb + 2 - k = 0$ s neznámou b. Její diskriminant je roven $D = 4k^2 - 4(2-k) = 4(k^2 + k - 2)$. Na to, aby měla rovnice řešení, musí být diskriminant nezáporný, tedy musí platit $k^2 + k - 2 \geqq 0$. Tato nerovnost je splněna pro $k \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty)$, tedy i pro uvažované $k \in \langle 1, 2)$. Potřebujeme ještě dokázat, že zkoumaná rovnice má aspoň jeden kořen b v intervalu $(0, 4)$, neboť $b = a^2$ a $a \in (0, 2)$. Všimněme si, že pro oba kořeny $b_{1,2}$ platí

$$\begin{aligned} b_{1,2} = \frac{2k \pm 2\sqrt{k^2 + k - 2}}{2} &= k \pm \sqrt{k^2 + k - 2} \leqq \\ &\leqq k + \sqrt{k^2 + k - 2} < k + \sqrt{k^2} = 2k < 4, \end{aligned}$$

přičemž jsme využili nerovnost $k < 2$. Na druhé straně pro kořen b_1 (se znaménkem + před $\sqrt{D}$) platí

$$b_1 = k + \sqrt{k^2 + k - 2} \geqq k > 0.$$

Tím jsme ukázali, že $0 < b_1 < 4$. Existuje tedy číslo $a = \sqrt{b_1}$ splňující rovnici (1).

Jiné řešení. Opakovaným dosazováním délek stran konkrétních trojúhelníků dojdeme k hypotéze, že $1 \leqq V < 2$. Dokazujme nejprve dolní odhad $1 \leqq V$, který je ekvivalentní s nerovností

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \leqq a^4 + b^4 + c^4.$$

Je to bikvadratická nerovnice s proměnnou a, takže po substituci $a^2 = t$ dostaneme kvadratickou nerovnici

$$0 \leqq t^2 - t(b^2 + c^2) + b^4 + c^4 - b^2c^2. \tag{2}$$

Její diskriminant je $D = (b^2 + c^2)^2 - 4(b^4 + c^4 - b^2c^2) = -3(b^4 + c^4 - 2b^2c^2) = -3(b^2 - - c^2)^2 \leqq 0$. Protože navíc je koeficient při t^2 na pravé straně (2) kladný, je nerovnice (2) splněna pro všechna reálná čísla b, c a t. Tím je nerovnost $V \geqq 1$ dokázána.

Přejděme k nerovnosti $V < 2$. Danou nerovnici přenásobme kladným jmenovatelem, dostaneme

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) > a^4 + b^4 + c^4.$$

Je to opět bikvadratická nerovnice s proměnnou a. Po substituci $t = a^2$ přejde nerovnice do tvaru $t^2 - 2t(b^2 + c^2) + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 < 0$. Její diskriminant je $D = 4(b^2 + c^2)^2 - 4(b^4 + + c^4 - 2b^2c^2) = 16b^2c^2$. Protože koeficient při t^2 je kladný, je řešením této nerovnice interval určený nerovnostmi

$$\frac{2(b^2 + c^2) - \sqrt{D}}{2} < t < \frac{2(b^2 + c^2) - \sqrt{D}}{2},$$

neboli

$$(b - c)^2 < t < (b + c)^2.$$

Tyto nerovnosti platí, protože $t = a^2$ a $|b - c| < a < b + c$ podle trojúhelníkových nerovností. Tím je nerovnost $V < 2$ dokázána.

Že hodnoty V zaplní celý interval $\langle 1, 2)$, dokážeme stejně jako v prvním řešení.

Jiný důkaz nerovnosti $V < 2$. Vyjděme z trojúhelníkové nerovnosti $c < a + b$. Po umocnění na druhou a následné úpravě dostaneme $c^2 - a^2 - b^2 < 2ab$. Po dalším umocnění na druhou dostaneme

$$c^4 + b^4 + a^4 - 2c^2a^2 - 2c^2b^2 + 2a^2b^2 < 4a^2b^2,$$

neboli

$$c^4 + b^4 + a^4 < 2c^2a^2 + 2c^2b^2 + 2a^2b^2.$$

Odtud již plyne, že $V < 2$.

Poznámka 1. Všimněme si, že podobné trojúhelníky mají stejnou hodnotu výrazu V. Skutečně, pokud a, b, c jsou strany trojúhelníku, jsou ka, kb, kc pro každé reálné $k > 0$ stranami podobného trojúhelníku a platí

$$\frac{(ka)^4 + (kb)^4 + (kc)^4}{(ka)^2(kb)^2 + (ka)^2(kc)^2 + (kb)^2(kc)^2} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

To znamená, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $c = 1$. Máme tedy zkoumat obor hodnot výrazu

$$\frac{a^4 + b^4 + 1}{a^2b^2 + a^2 + b^2}$$

za předpokladu $|a - b| < 1 < a + b$, což zjednodušuje a zpřehledňuje výpočty.

Poznámka 2. V druhé části řešení jsme měli zjistit obor hodnot funkce $f(a) = = \dfrac{a^4 + 2}{2a^2 + 1}$. Zřejmě $f(1) = 1$ a $f(0) = 2$. Ze spojitosti funkce f vyplývá, že na intervalu $(0, 1\rangle$ nabývá všechny hodnoty z intervalu $\langle 1, 2)$.

Poznámka 3. Pečlivým rozborem uvedených důkazů zjistíme, že nerovnost $V \geqq 1$ platí pro všechna reálná čísla a, b, c, z nichž aspoň dvě jsou nenulová.

4. *Určete všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že v některé číselné soustavě o základu $z \geqq 5$ platí následující kriterium dělitelnosti: trojmístné číslo $(abc)_z$ je dělitelné číslem n, právě když je číslem n dělitelné číslo $c + 3b - 4a$.*

Řešení. Protože $(abc)_z$ je číslo $az^2 + bz + c$, máme zjistit, kdy obecně platí ekvivalence: $n \mid c + 3b - 4a$, právě když $n \mid az^2 + bz + c$. V ní jsou a, b, c libovolné číslice při základu z, tj. čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, z - 1\}$. Všimněme si, že $z - 1 \geqq 4$, neboť předpokládáme, že $z \geqq 5$.

Zvolíme-li $a = b = c = 1$, dostaneme, že $n \mid 0$, právě když $n \mid z^2 + z + 1$. Protože nula je dělitelná každým celým číslem, musí platit $n \mid z^2 + z + 1$. Zvolíme-li $a = 1$, $b = 0$ a $c = 4$, dostaneme, že $n \mid 0$, právě když $n \mid z^2 + 4$. Podobnou úvahou jako výše zjistíme, že $n \mid z^2 + 4$.

Pokud nějaké číslo dělí dvě čísla, musí dělit i jejich největší společný dělitel, tedy $n \mid \mathrm{nsd}(z^2 + 4, z^2 + z + 1)$. Tento společný dělitel najdeme pomocí *Eukleidova algoritmu*:

$$\begin{aligned}\mathrm{nsd}(z^2 + 4, z^2 + z + 1) &= \mathrm{nsd}\bigl(z^2 + 4, z^2 + z + 1 - (z^2 + 4)\bigr) = \mathrm{nsd}(z^2 + 4, z - 3) = \\ &= \mathrm{nsd}\bigl(z^2 + 4 - z(z - 3), z - 3\bigr) = \mathrm{nsd}(4 + 3z, z - 3) = \\ &= \mathrm{nsd}\bigl(4 + 3z - 3(z - 3), z - 3\bigr) = \mathrm{nsd}(13, z - 3).\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že $n \mid 13$. Protože $n > 1$, je nutně $n = 13$. Má-li některé n požadovanou vlastnost, je to nutně číslo $n = 13$.

Dokažme, že číslo 13 skutečně danou vlastnost má. Odvozená nutná podmínka $n \mid \mathrm{nsd}(13, z - 3)$ je pro $n = 13$ splněna např. pro $z = 16$. Daná ekvivalence má pak tvar $13 \mid c + 3b - 4a$, právě když $13 \mid a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c$. Dokážeme silnější vlastnost, že totiž čísla $a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c$ a $c + 3b - 4a$ dávají při dělení třinácti stejný zbytek, neboli že jejich rozdíl je dělitelný třinácti:

$$(a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c) - (c + 3b - 4a) = 260a + 13b = 13(20 + b).$$

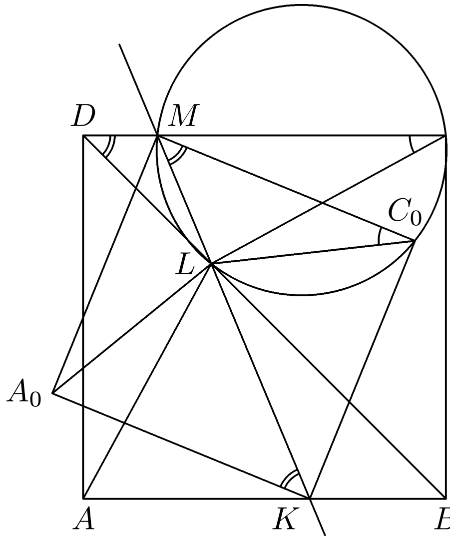
Úloha má jediné řešení $n = 13$.

Poznámka. Podobně jako v závěru řešení můžeme dokázat, že uvedené kritérium dělitelnosti pro $n = 13$ platí i v libovolné číselné soustavě se základem $z = 13k + 3$.

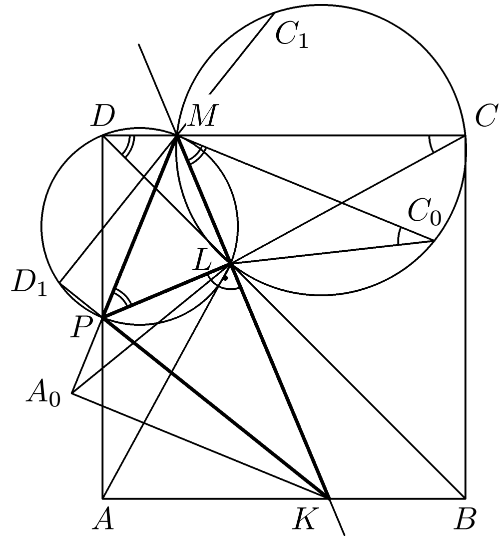
5. *V rovině jsou dány tři různé body K, L, M, které v tomto pořadí leží na přímce. V této rovině najděte množinu všech vrcholů C čtverců $ABCD$ takových, že bod K leží na straně AB, bod L na úhlopříčce BD a bod M na straně CD.*

Řešení. Je-li $ABCD$ libovolný čtverec, který splňuje podmínky úlohy, bude stejným podmínkám vyhovovat i čtverec, který dostaneme osovou souměrností podle přímky MK. Hledaná množina bude tedy osově souměrná podle této přímky a nám stačí určit tu její část, která leží v jedné z obou polorovin s hraniční přímkou MK.

Kromě libovolného čtverce $ABCD$, který splňuje podmínky úlohy, uvažujme čtverec $A_0B_0C_0D_0$ s úhlopříčkou $B_0D_0 = KM$ ($B_0 \equiv K$, $D_0 \equiv M$), přičemž vrchol C_0 leží



Obr. 3



Obr. 4

ve stejné polorovině ohraničené přímkou KM jako vrchol C čtverce $ABCD$ (obr. 3). (Vrchol C_0 zřejmě rovněž patří do hledané množiny.)

Protože trojúhelníky KLB a MLD jsou podobné podle věty *uu*, dělí bod L úhlopříčky obou čtverců ve stejném poměru

$$|BL| : |LD| = |KL| : |LM| = \text{konst.}$$

Velikost úhlu LCD ($|\sphericalangle LCD| = |\sphericalangle LC_0M|$) je určena polohou bodu L na úsečce MK, má tedy konstantní velikost, takže bod C leží na stejném oblouku γ kružnice opsané trojúhelníku LC_0M nad tětivou LM jako bod C_0. Navíc kružnice opsaná trojúhelníku A_0KL je shodná s kružnicí opsanou trojúhelníku C_0ML, protože v jedné z nich je vidět tětivu A_0L z bodu K pod úhlem 45° a v druhé tětivu C_0L shodné délky pod stejným úhlem z bodu M.

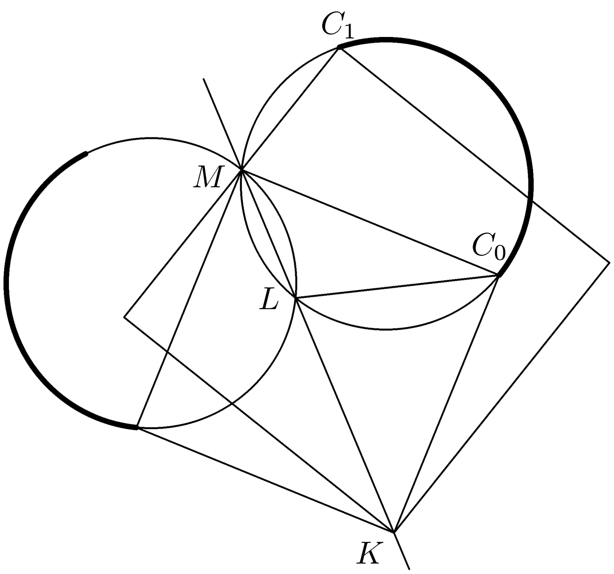
Protože bod M leží na straně CD, je zřejmě $|\sphericalangle LMC| \geqq |\sphericalangle LDC| = 45°$ (pokud $M \neq D$, je to vnější úhel trojúhelníku DML, který má při vrcholu D úhel 45°). Protože úhel LMC_0 měří právě 45°, leží bod C na části oblouku γ mezi body C_0 a M.

Dále si všimněme, že vrchol D čtverce $ABCD$ leží na oblouku, ze kterého je vidět úsečku LM pod úhlem 45° v polorovině opačné ke KMC. Sestrojme bod P (obr. 4), který leží na průsečíku přímky AD a kolmice k přímce MK v bodě L. Body M, D, L a P leží na Thaletově kružnici s průměrem MP, a protože $|\sphericalangle MPL| = |\sphericalangle MDL| = 45°$, je trojúhelník MPL rovnoramenný pravoúhlý. To znamená, že bod P je jednoznačně určen polohou bodu L na úsečce MK. (Mimochodem, bod P vznikne otočením bodu M kolem středu L o 90°, protože bod L jako bod úhlopříčky BD má od přímek CD a DA stejnou vzdálenost, je tedy přímka DA ve zmíněném otočení obrazem přímky CD; odtud rovněž plyne rovnost $|LM| = |LP|$.)

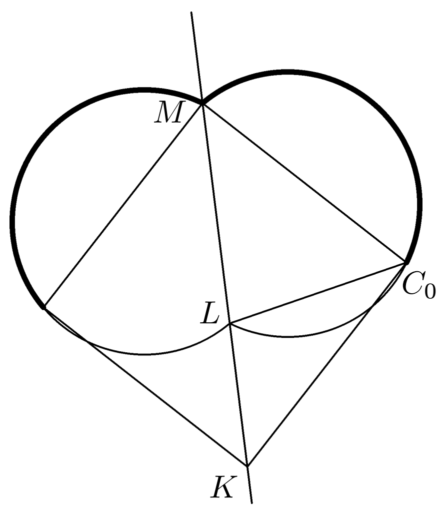
Bod D tudíž musí ležet na oblouku δ Thaletovy polokružnice nad průměrem MP v polorovině opačné k PML, zároveň však polopřímka DP (která obsahuje vrchol A) nesmí protnout úsečku LK. Odtud plyne, že vrchol D může ležet jen v té části zmíněné polokružnice nad průměrem MP, která leží v polorovině PKL. Přitom je zřejmé, že přímka PK tuto polokružnici protne v dalším bodě různém od P, právě když $|KL| > |LM|$ (pro $|KL| = |LM|$ bude KP tečnou kružnice nad průměrem MP). Označíme-li v takovém případě D_1 průsečík KP s polokružnicí δ a C_1 průsečík polopřímky D_1M s obloukem γ, je zřejmé, že vrchol C padne do části C_0C_1 oblouku γ. V opačném případě, tj. pro $|KL| \leqq |LM|$, vyplní zřejmě vrcholy C celou část C_0M oblouku γ.

Skutečně. Zvolme libovolný bod C na části C_0C_1 oblouku γ v prvním případě, resp. na C_0M v druhém případě. Přímka CM protne oblouk δ v bodě, který označíme D. Vrchol A pak sestrojíme jako průsečík polopřímky DP s Thaletovou kružnicí nad průměrem PK (v prvním případě máme zaručeno, že bude ležet v polorovině PKA_0, a ne v opačné). Protože jak už víme, jsou kružnice opsané trojúhelníkům LC_0M a LA_0K shodné, zjistíme snadno z příslušných obvodových úhlů, že $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle DCL|$, takže trojúhelníky DAL a DCL jsou shodné, tudíž $|DA| = |DC|$. Protože polopřímka DL protíná úsečku MK v bodě L, protne polopřímka AK polopřímku DL v bodě B za bodem K, přičemž trojúhelník DAB je rovnoramenný pravoúhlý. Je tedy $ABCD$ čtverec, který splňuje podmínky úlohy.

Závěr: Hledanou množinou vrcholů C čtverců $ABCD$ je pro $|ML| < |LK|$ oblouk C_0C_1 kružnice opsané trojúhelníku MLC_0 a oblouk s ním osově souměrný podle dané přímky MK (obr. 5), pro $|ML| \geqq |LK|$ je to oblouk C_0M stejné kružnice a oblouk s ním osově souměrný podle přímky MK (obr. 6).



Obr. 5



Obr. 6

6. *Hráči A a B hrají na desce složené ze šesti polí očíslovaných* $1, 2, \ldots, 6$ *následující hru. Na začátku je umístěna na pole s číslem* 2 *figurka a pak se hází běžnou hrací kostkou. Padne-li číslo dělitelné třemi, posune se figurka na pole s číslem o* 1 *menším, jinak na pole s číslem o* 1 *větším. Hra končí vítězstvím hráče A resp. B, dostane-li se figurka na pole s číslem* 1 *resp.* 6. *S jakou pravděpodobností zvítězí hráč A?*

Řešení. Vyřešme nejprve lehčí úlohu. Hrajme stejnou hru, ale na desce složené ze čtyř políček označených čísly 1, 2, 3, 4, přičemž B vyhraje, skončí-li figurka na poli s číslem 4. Pravděpodobnost, že zvítězí hráč A hned prvním tahem, je $\frac{1}{3}$. S pravděpodobností $\frac{2}{3}$ se figurka dostane na políčko číslo 3. Teď s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ vyhraje hráč B a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ se figurka dostane na políčko číslo 2. V tomto okamžiku jsme se dostali do počáteční pozice. Shrňme, co se vlastně stalo.

Hráč A vyhrál s pravděpodobností $\frac{1}{3}$.

Hráč B vyhrál s pravděpodobností $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Do počáteční pozice jsme se dostali s pravděpodobností $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Je zřejmé, že po dalších dvou tazích budeme mít následující bilanci:

Hráč A vyhrál s pravděpodobností $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3}$.

Hráč B vyhrál s pravděpodobností $\frac{4}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9}$.

Do počáteční pozice jsme se dostali s pravděpodobností $\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9}$.

Opakováním tohoto postupu dostaneme, že hráč A vyhraje s pravděpodobností

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \ldots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{3}{7}.$$

Použili jsme vzorec pro součet geometrické řady. Zjistili jsme, že hráč A vyhraje s pravděpodobností $\frac{3}{7}$. Podobným postupem dostaneme, že hráč B vyhraje s pravděpodobností $\frac{4}{7}$. Odtud vyplývá, že pravděpodobnost remízy je 0.

Uvažujme teď stejnou hru hranou na desce s pěti políčky. V tomto případě vyhraje hráč A po prvním tahu s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ a s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ se dostane figurka na políčko číslo 3. Všimněme si, že políčko číslo 3 leží ve středu desky. Intuitivně je jasné, že v tomto okamžiku vyhraje hráč B se čtyřikrát větší pravděpodobností než hráč A. To znamená, že hráč A vyhraje s pravděpodobností $\frac{1}{5}$ a hráč B s pravděpodobností $\frac{4}{5}$. Pokusme se to dokázat.

Uvažujme libovolnou posloupnost tahů figurkou z políčka 3 takovou, aby skončila na políčku číslo 1. Zapišme ji pomocí písmen P a L podle toho, zda jsme táhli doprava anebo doleva, například $PLLPLL$. Uvažujme jinou posloupnost tahů tak, že každé písmeno P nahradíme písmenem L a naopak. V našem případě to znamená $LPPLPP$. Dostali jsme posloupnost tahů, po nichž skončí figurka na políčku číslo 5. Dále je jasné, že počet písmen L je v prvním případě o dvě větší než počet písmen P, v druhém případě je počet písmen L o dvě menší než počet písmen P. Z toho vyplývá, že pravděpodobnost první cesty je čtyřikrát menší než pravděpodobnost druhé cesty. Protože takovéto přiřazení cest mezi sebou je vzájemně jednoznačné, dostáváme, že pravděpodobnost výhry hráče B je čtyřikrát větší než pravděpodobnost výhry hráče A.

Nakonec dostáváme, že pravděpodobnost výhry hráče A je $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$.

Vyřešme hru na pěti políčkách ještě stejným postupem jako hru na čtyřech políčkách.

Hráč A vyhraje prvním tahem s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ a s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ se figurka posune na políčko číslo 3. V tomto okamžiku vyhraje hráč A po dalších dvou tazích s pravděpodobností $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, hráč B s pravděpodobností $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ a figurka se dostane zpět na políčko číslo 3 s pravděpodobností $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

Tedy po nejvýše čtyřech tazích vyhraje hráč A s pravděpodobností

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9}.$$

Po nejvýše šesti tazích vyhraje hráč A s pravděpodobností

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9}\Big(1 + \frac{4}{9}\Big).$$

Opakováním tohoto postupu zjistíme, že hráč A vyhraje s pravděpodobností

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9}\left(1 + \frac{4}{9} + \Big(\frac{4}{9}\Big)^2 + \Big(\frac{4}{9}\Big)^3 \dots\right).$$

V závorce je součet geometrické řady s kvocientem $\frac{4}{9}$. Úpravou dostaneme, že hráč A vyhraje s pravděpodobností

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{7}{15}.$$

Podobně dokážeme, že hráč B vyhraje s pravděpodobností $\frac{8}{15}$. To znamená, že pravděpodobnost remízy je 0.

Nakonec vyřešme zadanou úlohu. Označme p_i pravděpodobnost, že vyhraje hráč A, přičemž figurka stojí na i-tém políčku. Dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_3,\\
p_3 &= \frac{1}{3}p_2 + \frac{2}{3}p_4,\\
p_4 &= \frac{1}{3}p_3 + \frac{2}{3}p_5,\\
p_5 &= \frac{1}{3}p_4.
\end{aligned}$$

Postupným dosazováním z jedné rovnice do druhé dostaneme řešení $p_2 = \frac{15}{31}$. Protože na začátku stojí figurka na políčku číslo 2, je pravděpodobnost výhry hráče A rovna $\frac{15}{31}$. Podobným způsobem můžeme sestavit a vypočítat systém rovnic pro hráče B a dostaneme, že hráč B vyhraje s pravděpodobností $\frac{16}{31}$. Pravděpodobnost remízy je znovu 0. Tím je úloha vyřešena.