52. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Palindromem rozumíme přirozené číslo, které se čte zepředu i zezadu stejně, např. 16 261. Najděte největší čtyřmístný palindrom, jehož druhá mocnina je také palindromem.*

Řešení. Každý čtyřmístný palindrom $p = \overline{abba}$ lze zapsat ve tvaru

$$p = a \cdot 1001 + b \cdot 110,$$

kde $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Potom druhá mocnina čísla $\overline{abba}$ má tvar

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2 \cdot 1\,002\,001 + 2ab \cdot 110\,110 + b^2 \cdot 12\,100 = \\ &= a^2 \cdot 10^6 + 2ab \cdot 10^5 + (b^2 + 2ab) \cdot 10^4 + \\ &\quad + (2a^2 + 2b^2) \cdot 10^3 + (b^2 + 2ab) \cdot 10^2 + 2ab \cdot 10^1 + a^2. \end{aligned}$$

Poslední číslice čísla p^2 je tedy stejná jako poslední číslice čísla a^2.

Pro $a \geqq 4$ je číslo p^2 nutně osmimístné. Jeho první číslice je rovna jedné z hodnot $c, c+1, c+2$, kde c je první číslice dvojmístného čísla a^2. (Maximální přenos z nižšího řádu je roven číslu 2.) Je-li však dané číslo opět palindromem, je jeho první i poslední číslice stejná. Porovnáním první a poslední číslice u čísel 16, 25, 36, 49, 64, 81 vidíme, že žádné z nich není tvaru $\overline{c(c+2)}$, $\overline{c(c+1)}$ nebo $\overline{cc}$.

Je-li $a = 3$ a $b \geqq 2$, je číslo p^2 opět osmimístné, jeho poslední číslice je 9 a první je 1, nejedná se tedy o palindrom.

Ve všech ostatních případech je číslo p^2 sedmimístné. Protože a^2 je pouze jednomístné a zápis čísla p^2 je symetrický, musí být nutně všechny tři hodnoty $2ab$, $2ab + b^2$, $2a^2 + 2b^2$ menší než 10, aby nedošlo k přenosu do vyššího řádu. Diskutujme tři případy:

- $a = 3$: nerovnici $2 \cdot 3^2 + 2b^2 < 10$ nevyhovuje žádné b,
- $a = 2$: nerovnici $2 \cdot 2^2 + 2b^2 < 10$ vyhovuje pouze $b = 0$,
- $a = 1$: nerovnici $2 \cdot 1^2 + 2b^2 < 10$ vyhovuje pouze $b = 0$, $b = 1$,

Závěr: Největším čtyřmístným palindromem splňujícím podmínky úlohy je číslo 2 002.

2. *Najděte všechny trojice reálných čísel (x, y, z) vyhovující soustavě rovnic*

$$x^3 + y^3 = 9z^3,$$
$$x^2y + y^2x = 6z^3.$$

Řešení. Přičteme-li k první rovnici trojnásobek rovnice druhé, získáme rovnici

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27z^3.$$

Její úpravou dostaneme

$$(x+y)^3 = (3z)^3, \quad \text{tj.} \quad x+y = 3z.$$

Dosadíme-li tento výraz do levé strany druhé rovnice soustavy, dostaneme

$$x^2y + xy^2 = xy(x+y) = 3xyz, \quad \text{tj.} \quad 3xyz = 6z^3.$$

Rozlišíme dva případy.

Je-li $z = 0$, je poslední rovnice splněna pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Z první rovnice soustavy získáme $x^3 + y^3 = 0$, tj. $y = -x$. Řešením je každá trojice $(t, -t, 0)$, kde t je libovolné reálné číslo.

Je-li $z \neq 0$, pak $xy = 2z^2$. Společně s rovnicí $x + y = 3z$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= 3z, \\ xy &= 2z^2 \end{aligned}$$

dvou rovnic o dvou neznámých x, y s parametrem z. Eliminací např. neznámé y dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 3zx + 2z^2 = 0.$$

Ze vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice získáme řešení ve tvaru $x = z$, $y = 2z$ nebo $x = 2z$, $y = z$. Řešením je tedy každá trojice $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$, kde t je libovolné reálné číslo (různé od nuly).

Závěr: Soustava má řešení $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$ pro každé $t \neq 0$, $(t, -t, 0)$ pro každé t a žádné jiné řešení nemá.

Jiné řešení. První rovnici vynásobíme dvěma a odečteme od ní trojnásobek rovnice druhé (vyloučíme tak neznámou z). Získáme rovnici

$$2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 0.$$

Levou stranu rovnice postupně upravíme na tvar:

$$\begin{aligned} 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3(x+y)xy &= 0, \\ (x+y)(2x^2 - 5xy + 2y^2) &= 0, \\ (x+y)(2x - y)(x - 2y) &= 0. \end{aligned}$$

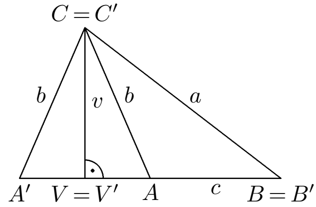
Mohou tedy nastat tři případy:

- $x + y = 0$, potom $y = -x$. Dosazením do první rovnice soustavy dostaneme $9z^3 = x^3 + (-x)^3 = 0$, tj. $z = 0$.
- $2x - y = 0$, potom $y = 2x$. Dosazením do první rovnice soustavy dostaneme $9z^3 = x^3 + (2x)^3 = 9x^3$, tj. $z = x$.
- $x - 2y = 0$, potom $x = 2y$. Dosazením do první rovnice soustavy dostaneme $9z^3 = (2y)^3 + y^3 = 9y^3$, tj. $z = y$.

Závěr: Řešením jsou všechny trojice $(t, -t, 0)$, $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$, kde t je libovolné reálné číslo.

3. *Je dán trojúhelník se stranami délek a, b, c a obsahem S. Dokažte, že rovnost $2c^2 = |a^2 - b^2|$ platí, právě když existuje trojúhelník se stranami délek a, b, $2c$ a obsahem $2S$.*

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí $a \geqq b$. Jestliže je obsah trojúhelníku $A'B'C'$ se stranami délek a, b, $2c$ roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c, jsou výšky CV a $C'V'$ těchto trojúhelníků shodné. Trojúhelníky ACV a $A'C'V'$ jsou tedy shodné podle věty *Ssu*, proto můžeme oba trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ přemístit tak, aby platilo $B = B'$, $C = C'$ a $V = V'$; pak už ovšem nemůže platit $A = A'$. Jaká je poloha bodů A a A' na přímce BV? Protože $b = |AC| = |A'C|$, je trojúhelník $AA'C$ je rovnoramenný a jeho základna AA' má střed v bodě V (obr. 1). Předpoklad $a \geqq b$ znamená, že $|AC| = |A'C| \leqq |BC|$, takže bod B neleží na úsečce AA'; protože $|AB| = c$ a $|A'B| = 2c$, leží bod B na polopřímce opačné k AA' tak, že bod A je středem úsečky $A'B$.



Obr. 1

Z pravoúhlých trojúhelníků AVC a BVC vyplývá

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{3}{2}c\right)^2,$$
$$v^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2.$$

Porovnáním pravých stran dostaneme po úpravě

$$a^2 - b^2 = 2c^2.$$

Ukázali jsme tak, že pokud k danému trojúhelníku ABC existuje trojúhelník se stranami a, b, $2c$ a obsahem $2S$, pak pro délky a, b, c musí být splněna rovnost $|a^2 - b^2| = 2c^2$.

Předpokládejme naopak, že pro velikosti stran a, b, c trojúhelníku ABC platí $|a^2 - b^2| = 2c^2$. Nejprve ukážeme, že trojúhelník se stranami a, b, $2c$ existuje, tj. že platí trojúhelníková nerovnost

$$a + b > 2c > |a - b|.$$

Pro trojúhelník ABC platí trojúhelníková nerovnost $a + b > c > |a - b|$. Proto platí $2c > c > |a - b|$. Vynásobíme-li dále obě strany nerovnosti $c > |a - b|$ kladným výrazem $a + b$, obdržíme nerovnost

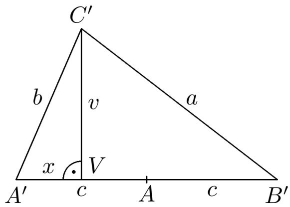
$$c(a + b) > |a^2 - b^2| = 2c^2,$$

z níž po dělení c vyplývá nerovnost

$$a + b > 2c.$$

Předpokládejme nyní, že v trojúhelníku $A'B'C'$ o stranách a, b, $2c$ platí rovnost $2c^2 = a^2 - b^2$ (opět bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $a > b$ — zde nemůže být $a = b$, protože by bylo $c = 0$).

Vysvětlíme, proč pata V výšky z vrcholu C' na stranu $A'B'$ padne dovnitř této strany (a ne na její prodloužení). K tomu stačí ukázat, že trojúhelník $A'B'C'$ má ostré vnitřní úhly u vrcholů A' i B' (obr. 2). Úhel $A'B'C'$ je menší než úhel $B'A'C'$, neboť předpokládáme, že $a > b$. Úhel $B'A'C'$ je ostrý, právě když platí nerovnost $|B'C'|^2 < |A'B'|^2 + |A'C'|^2$, neboli $a^2 < 4c^2 + b^2$. Poslední nerovnost je ale zaručena rovností $a^2 = b^2 + 2c^2$.



Obr. 2

Z pravoúhlých trojúhelníků $A'VC'$ a $B'VC'$ plyne, že pro délky $x = |A'V|$ a $v = |C'V|$ platí

$$v^2 = b^2 - x^2,$$
$$v^2 = a^2 - (2c - x)^2.$$

Porovnáním pravých stran dostaneme po úpravě

$$4cx = 4c^2 - (a^2 - b^2)$$

a dosazením za $a^2 - b^2$ vyjde

$$4cx = 4c^2 - 2c^2 = 2c^2, \qquad \text{tj. } x = \frac{1}{2}c.$$

Označíme-li A (ve shodě s první částí) střed strany $A'B'$, platí

$$|AC'| = |A'C'| = b,$$

tudíž trojúhelník $AB'C'$ má strany délek a, b, c a obsah rovný polovině obsahu trojúhelníku $A'B'C'$. Tím jsme dokázali opačnou implikaci.

Jiné řešení. Z Heronova vzorce pro obsah S_1 trojúhelníku ABC a pro obsah S_2 trojúhelníku $A'B'C'$ máme

$$S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\bigl((a+b)^2 - c^2\bigr)\bigl(c^2 - (a-b)^2\bigr)},$$
$$S_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\bigl((a+b)^2 - 4c^2\bigr)\bigl(4c^2 - (a-b)^2\bigr)}.$$

Z podmínky $S_2 = 2S_1$ plyne

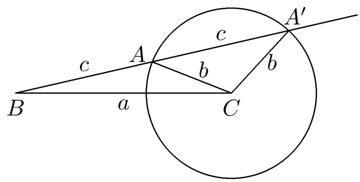
$$\bigl((a+b)^2 - 4c^2\bigr)\bigl(4c^2 - (a-b)^2\bigr) = 4\bigl((a+b)^2 - c^2\bigr)\bigl(c^2 - (a-b)^2\bigr).$$

Z této podmínky po úpravě dostaneme

$$(a^2 - b^2)^2 = 4c^4, \quad \text{tj. } \bigl|a^2 - b^2\bigr| = 2c^2.$$

Provedené úpravy jsou ekvivalentní, proto je možno celý postup obrátit. Z rovnosti $|a^2 - b^2| = 2c^2$ vyplývá, že trojúhelník $A'B'C'$ má dvakrát větší obsah než trojúhelník ABC. Existenci trojúhelníků lze dokázat stejným postupem jako v prvním řešení.

Jiné řešení. Uvažujme úsečku BC délky a ($a > b$) a kružnici k se středem v bodě C a poloměrem b (obr. 3).



Obr. 3

Ve stejné polorovině (s hraniční přímkou BC) uvažujme body A a A', pro něž platí $|AB| = c$, $|A'B| = 2c$. Leží-li body B, A a A' na téže přímce, potom obsah trojúhelníku $A'BC$ je dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABC. Z mocnosti bodu B ke kružnici k plyne

$$|BA| \cdot |BA'| = 2c^2 = a^2 - b^2.$$

Je-li naopak splněna poslední rovnost, protne polopřímka opačná k AB kružnici k v bodě, jehož vzdálenost od bodu B je rovna $2c$, tímto bodem je však A'. Odtud již plyne tvrzení pro obsahy trojúhelníků. Existenci trojúhelníků lze dokázat stejným postupem jako v prvním řešení.

4. *Krokem budeme rozumět nahrazení uspořádané trojice celých čísel* (p, q, r) *trojicí* $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. *Rozhodněte, zda existuje celé číslo* k *takové, že z trojice* $(1, 3, 7)$ *vznikne po konečném počtu kroků trojice* $(k, k + 1, k + 2)$.

Řešení. Sečteme-li všechna tři čísla nově vzniklé trojice, dostaneme

$$(r + 5q) + (3r - 5p) + (2q - 3p) = 4r + 7q - 8p = 3(r + 2q - 3p) + (p + q + r).$$

Toto číslo dává při dělení třemi stejný zbytek jako číslo $(p+q+r)$, tj. zbytek při dělení třemi součtu čísel v trojici zůstává zachován. Pro trojici $(1, 3, 7)$ je zbytek roven dvěma $(1 + 3 + 7 = 11 = 3 \cdot 3 + 2)$.

Součet tří po sobě jdoucích celých čísel je však dělitelný třemi, takže dává zbytek nula. Plyne to z rovnosti $k + (k + 1) + (k + 2) = 3(k + 1)$.

Závěr: Po konečném počtu *kroků* nemůžeme z trojice $(1, 3, 7)$ dospět k trojici po sobě jdoucích celých čísel.

Jiné řešení. Předpokládejme, že z nějaké trojice (a, b, c) vznikne v následujícím *kroku* trojice po sobě jdoucích čísel (a_1, b_1, c_1). Tato tři čísla jsou tedy nutně členy aritmetické posloupnosti s diferencí 1. Musí proto platit

$$c_1 - b_1 = b_1 - a_1.$$

Dosadíme-li sem $a_1 = c + 5b$, $b_1 = 3c - 5a$, $c_1 = 2b - 3a$, dostaneme po úpravě

$$7(a + b) = 5c.$$

Odtud nutně platí $c = 7k$, $a + b = 5k$ pro nějaké celé číslo k. Potom ale $a_1 = 32k - 5a$, $b_1 = 21k - 5a$, $c_1 = 10k - 5a$. Aby tato trojice tvořila aritmetickou posloupnost s diferencí jedna, muselo by být $11k = -1$, tj. $k = -\frac{1}{11}$. To je spor s předpokladem, že k je celé číslo.

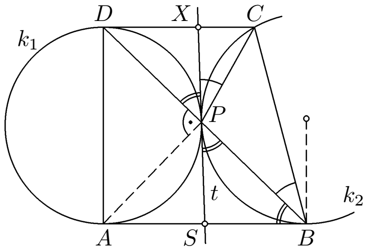
Jiné řešení. Zkoumejme, jak se mění parita trojice čísel v následujících *krocích*. Na začátku jsou všechna tři čísla lichá. Postupně dostáváme:

$$(l, l, l) \to (s, s, l) \to (l, l, s) \to (l, l, l) \to \dots$$

Protože se parita čísel pravidelně mění dle daného schématu, nemůžeme z trojice lichých čísel dospět k trojici (s, l, s), resp. (l, s, l), které reprezentují všechny trojice po sobě jdoucích čísel (za sudým číslem následuje liché a naopak).

5. *V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Kružnice k_1 sestrojená nad stranou AD jako průměrem a kružnice k_2, která prochází vrcholy B, C a dotýká se přímky AB, mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte, že úhly CPD a ABC jsou shodné.*

Řešení. Protože úsečka AD je průměrem kružnice k_1, je úhel APD pravý (obr. 4).



Obr. 4

Uvažujme společnou tečnu t obou kružnic procházející bodem P. Označme po řadě S a X průsečíky tečny t s úsečkami AB a CD. Přímka AB je však také společnou tečnou obou kružnic. Platí proto $|SA| = |SP| = |SB|$. Bod S je proto středem Thaletovy kružnice sestrojené na stranou AB jako průměrem. Úhel APB je tudíž stejně jako úhel APD pravý a bod P je tedy vnitřním bodem úsečky BD.

Trojúhelník BPS je rovnoramenný se základnou BP, pro jeho úhly tedy platí $|\sphericalangle SBP| = |\sphericalangle SPB|$. Úhel SPB má navíc stejnou velikost jako úhel DPX (dvojice vrcholových úhlů). Platí proto $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle DPX|$. Současně však je úhel XPC úhlem úsekovým pro tětivu CP kružnice k_2. Z rovnosti obvodového a úsekového úhlu máme $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle XPC|$.

Celkově dostáváme

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DPX| + |\sphericalangle XPC| = |\sphericalangle DPC|,$$

což jsme chtěli dokázat.

6. *V kartézské soustavě souřadnic Ouv znázorněte množinu všech bodů* $[u,v]$, *kde* $u>0$, *pro něž má rovnice*

$$|x^2-ux|+vx-1=0$$

s neznámou x právě tři různá reálná řešení.

ŘEŠENÍ. Nulové body výrazu x^2-ux jsou $x=0$ a $x=u$. Protože dle zadání platí $u>0$, rozdělíme reálnou osu na tři vzájemně disjunktní intervaly $I_1=(-\infty,0)$, $I_2=\langle 0,u\rangle$ a $I_3=(u,\infty)$.

Na intervalech I_1 a I_3 řešíme kvadratickou rovnici

$$x^2-(u-v)x-1=0.$$

Tato rovnice má kladný diskriminant $(u-v)^2+4$, a tudíž dva různé reálné kořeny

$$x_1=\frac{u-v-\sqrt{(u-v)^2+4}}{2},$$
$$x_2=\frac{u-v+\sqrt{(u-v)^2+4}}{2}.$$

Protože $\sqrt{(u-v)^2+4}>|u-v|$, platí $x_1<0$ a $x_2>0$. Znamená to, že číslo x_1 je vždy řešením rovnice (1), neboť $I_1=(-\infty,0)$, zatímco číslo x_2 je řešením rovnice (1), právě když platí $x_2\in I_3$, neboli $x_2>u$.

Na intervalu I_2 řešíme kvadratickou rovnici

$$x^2-(u+v)x+1=0.$$

Tato rovnice má diskriminant $D=(u+v)^2-4$ a případné reálné kořeny

$$x_3=\frac{u+v-\sqrt{(u+v)^2-4}}{2},$$
$$x_4=\frac{u+v+\sqrt{(u+v)^2-4}}{2}.$$

Ze zadání vyplývá, že aspoň jeden z kořenů x_3, x_4 musí být řešením rovnice (1) (ležícím na intervalu I_2). Proto předně musí být diskriminant D nezáporný, z čehož plyne podmínka $|u+v|\geqq 2$. Protože navíc $\sqrt{(u+v)^2-4}<|u+v|$, mají oba kořeny x_3, x_4 stejné znaménko jako součet $u+v$. Dohromady to znamená, že musí platit $u+v\geqq 2$ (v případě $u+v\leqq -2$ by totiž žádné z čísel x_3, x_4 neleželo na I_2). Za podmínky $u+v\geqq 2$ ovšem platí $0<x_3\leqq x_4$, takže ze zadání plyne, že na intervalu $I_2=\langle 0,u\rangle$ leží číslo x_3 (a případně i číslo x_4).

Z dosavadních úvah plyne, že naší úlohou je posoudit otázku, kdy za podmínek

$$u>0 \quad \text{a} \quad u+v\geqq 2 \tag{2}$$

nastane některý z těchto případů:
A) $x_2 \notin I_3$, $\{x_3, x_4\} \subset I_2$, $x_3 \neq x_4$;
B) $x_2 \in I_3$, $x_3 = x_4 \in I_2$;
C) $x_2 \in I_3$, $x_3 \in I_2$, $x_4 \notin I_2$.

Ad A. Zjistíme, kdy jsou splněny jednotlivé podmínky, které tento případ vymezují (pro lepší přehled je v textu uvádíme černými puntíky).

• $x_2 \notin I_3$, neboli $x_2 \leqq u$. Po úpravě získáme nerovnost $\sqrt{(u-v)^2+4} \leqq u+v$, jejíž pravá strana je podle (2) kladná, takže obě strany můžeme umocnit na druhou. Po další snadné úpravě dostaneme podmínku $uv \geqq 1$. Proto platí:

$$x_2 \notin I_3 \quad \Longleftrightarrow \quad uv \geqq 1.$$

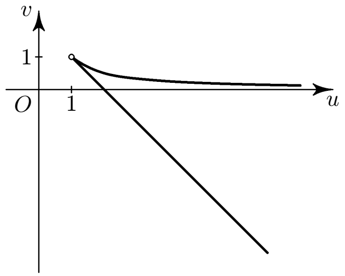
• $\{x_3, x_4\} \subset I_2$. Jak víme, za podmínek (2) platí $0 < x_3 \leqq x_4$, stačí proto pouze zkoumat nerovnost $x_4 \leqq u$, neboli $\sqrt{(u+v)^2-4} \leqq u-v$. Poslední nerovnost může platit jedině tehdy, když $u \geqq v$. Pak po umocnění stran zkoumané nerovnosti a následné úpravě dostaneme podmínku $uv \leqq 1$. Proto platí:

$$\{x_3, x_4\} \subset I_2 \quad \Longleftrightarrow \quad u \geqq v \ \wedge \ uv \leqq 1.$$

• $x_3 \neq x_4$. Z dřívějšího odvození podmínky $u+v \geqq 2$ je jasné, že rovnost $x_3 = x_4$ nastane, právě když $u+v=2$. Za podmínek (2) tedy platí

$$x_3 \neq x_4 \quad \Longleftrightarrow \quad u+v > 2.$$

Shrneme nyní všechny podmínky pro zkoumaný případ A. Z nerovností $uv \geqq 1$ a $uv \leqq 1$ plyne $uv = 1$, neboli $v = 1/u$. Zbývající podmínky jsou pak tvaru $u \geqq 1/u$ a $u + 1/u > 2$ a jsou zřejmě obě splněny, právě když $u > 1$. Hledané body $[u, v]$ v případě A tedy tvoří část hyperboly $v = 1/u$ určenou omezením $u > 1$ (obr. 5).



Obr. 5

Ad B. Z předchozího rozboru případu A plyne, že za podmínek (2) platí tyto ekvivalence:

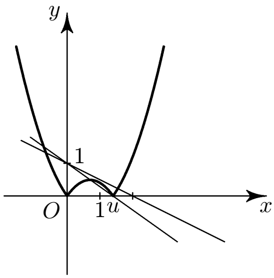
$$x_2 \in I_3 \iff uv < 1, \quad x_4 \in I_2 \iff u \geqq v \ \wedge \ uv \leqq 1, \quad x_3 = x_4 \iff u+v=2.$$

Vidíme, že v případě B musí platit $v = 2 - u$. Tehdy jsou zbývající podmínky tvaru $(2-u)u < 1$ a $u \geqq 2 - u$ a jsou zřejmě obě splněny, právě když $u > 1$. Hledané body $[u, v]$ v případě B tedy tvoří polopřímku určenou rovnicí $v = 2 - u$ a omezením $u > 1$.

Ad C. Podmínku $x_3 \in I_2$ lze vyjádřit nerovností $x_3 \leqq u$, která je ekvivalentní s nerovností $\sqrt{(u+v)^2 - 4} \geqq v - u$, jež je splněna triviálně, pokud $u \geqq v$. Jak jsme ale ukázali dříve, v případě $u \geqq v$ platí nejen $x_3 \in I_2$, ale také $x_4 \in I_2$, což případ C vylučuje. V případě C tedy nutně platí $u < v$ a z nerovnosti $\sqrt{(u+v)^2 - 4} \geqq v - u$ po umocnění a úpravě dostaneme podmínku $uv \geqq 1$. Jak ale víme, z poslední nerovnosti plyne $x_2 \notin I_3$, takže případ C nemůže nikdy nastat.

Závěr: Množinou všech bodů vyhovujícím zadání je část hyperboly $v = 1/u$ a část přímky $v = 2 - u$, v obou případech části určené podmínkou $u > 1$.

Jiné řešení. Rovnici lze řešit také graficky. Zkoumáme, kdy budou mít grafy funkcí $f(x) = |x^2 - ux|$ a $g(x) = 1 - vx$ právě tři společné body (obr. 6).



Obr. 6

Graf funkce f je složen z částí paraboly, grafem funkce g je přímka procházející bodem $[0, 1]$. Aby tato přímka měla s grafem $f(x)$ společné právě tři body, musí být buď tečnou paraboly na intervalu $(0, u)$ (potom $u + v = 2$, odvození je analogické jako v předchozím řešení — pomocí diskriminantu), nebo musí procházet bodem $[u, 0]$ a současně protínat graf funkce f ve vnitřním bodě intervalu $(0, u)$. Dosadíme-li souřadnice bodu $[u, 0]$ do rovnice přímky g, dostaneme $0 = 1 - vu$, tj. $uv = 1$. Stejně jako v předchozím řešení musí platit $u > 1$, což můžeme ověřit nalezením druhého průsečíku přímky s parabolou.