52. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácího kola kategorie C

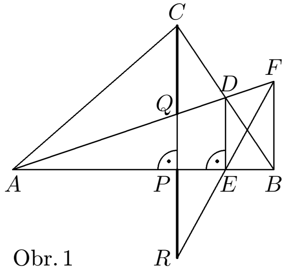
1. *Z pěti jedniček, pěti dvojek, pěti trojek, pěti čtyřek a pěti pětek sestavte pět navzájem různých pětimístných čísel tak, aby jejich součet byl co největší.*

Řešení. Největší možný součet by vytvořila pětice čísel 54 321, 54 321, 54 321, 54 321, 54 321. Jelikož mají být ale čísla navzájem různá, pokusíme se změnit tuto pětici tak, aby se nenarušilo trojčíslí 543, tj. aby změna součtu byla co nejmenší. Tak ale budou ještě dvě z pěti čísel stejná, neboť z číslic 1, 2 je možné sestavit pouze čtyři různá dvojčíslí 11, 12, 21, 22. Změníme proto jedno trojčíslí 543 na 542 tak, že zaměníme číslici 2 číslicí 3 na místě desítek. Stejně tak na místě jednotek nemůže být všech pět jedniček, protože by poslední trojčíslí nejméně tří pětimístných čísel bylo 321. Vyměníme proto číslici 1 z místa jednotek s číslicí 2 z místa stovek a to proto, aby změna součtu pětice čísel byla co nejmenší. Po těchto výměnách mohou být poslední dvojčíslí pěti čísel tato: 31, 22, 21, 21, 11, nebo 31, 21, 21, 21, 12, nebo 32, 21, 21, 21, 11. Snažíme se nyní rozmístit tato dvojčíslí za trojčíslí 543, 543, 543, 543, 542. Zjistíme, že vyhovuje pouze první pětice dvojčíslí. Hledaná pětice pětimístných čísel s největším možným součtem je 54 331, 54 322, 54 321, 54 311, 54 221.

Návodné úlohy:

1. Ze tří jedniček, tří dvojek a tří trojek sestavte tři navzájem různá trojmístná čísla tak, aby jejich součet byl co největší.
2. Z pěti jedniček, pěti dvojek, pěti trojek, pěti čtyřek a pěti pětek sestavte pět navzájem různých pětimístných čísel tak, aby se v každém čísle vyskytovala právě jedna z pěti číslic a aby součet všech pěti čísel byl co největší.

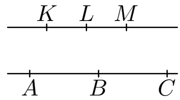
2. *Je dán trojúhelník ABC s ostrými vnitřními úhly při vrcholech A a B. Označme Q průsečík těžnice AD s výškou CP a E patu kolmice z bodu D na stranu AB. Dále nechť R je bod na polopřímce opačné k PC takový, že $|PR| = |CQ|$. Dokažte, že přímky AD a RE jsou různoběžné a že jejich průsečík leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B.*



Obr. 1

Řešení. Ze zadání víme, že $|PR| = |CQ|$, proto je i $|QR| = |CP|$ (obr. 1). Úsečka DE je střední příčkou trojúhelníku CPB, proto je $|DE| = \frac{1}{2}|CP|$. Je tedy také $|DE| = \frac{1}{2}|QR|$. Protože je $DE \parallel QR$, nemůžou být úsečky RE a QD rovnoběžné (jinak by byl $REDQ$ rovnoběžník a platilo by $|DE| = |QR|$). Proto se přímky RE a QD protínají v bodě, který je na obrázku označen jako F, a úsečka DE je střední příčkou trojúhelníků CPB a QRF, jejichž strany CP a QR leží na stejné přímce. Proto je vzdálenost bodů F a B od přímky CR stejná, neboli přímky CR a FB jsou rovnoběžné, a tudíž přímka FB je (stejně jako přímka CR) kolmá k přímce AB.

NÁVODNÉ ÚLOHY:



1. Na rovnoběžných přímkách jsou dány body A, B, C, K, L, M podle obrázku a přitom platí $|AB| = |BC| \neq |KL| = |LM|$. Vysvětlete, proč neplatí ani $AL \parallel BM$, ani $BK \parallel CL$. Označme P průsečík přímek AL, BM a Q průsečík přímek BK, CL. Dokažte, že $PQ \parallel KM \parallel AC$.
2. Je dán libovolný čtyřúhelník $ABCD$, jehož žádné dvě protilehlé strany nejsou rovnoběžné. Označme E střed strany AB a F střed strany CD. Protínají se vždy přímky AD, EF a BC v jednom bodě?

3. *Předpokládejme, že každá ze dvou bank A a B bude mít po následující dva roky stálou roční úrokovou míru. Kdybychom uložili* $5/6$ *našich úspor u banky A a zbytek u banky B, vzrostly by naše úspory po jednom roce na* 67 000 *Kč a po dvou letech na* 74 900 *Kč. Kdybychom však uložili* $5/6$ *našich úspor u banky B a zbytek u banky A, vzrostly by naše úspory po jednom roce na* 71 000 *Kč. Na jakou částku by se v takovém případě naše úspory zvýšily po dvou letech?*

ŘEŠENÍ. Nechť naše výchozí úspory činí x Kč a nechť roční úroková míra u banky A (banky B) je $p\,\%$ ($q\,\%$), tj. vklad u banky A (banky B) vzroste po jednom roce a-krát (b-krát), kde $a = 1 + \frac{p}{100}$ ($b = 1 + \frac{q}{100}$). Podle zadání platí

$$\left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot a + \left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot b = 67\,000,$$
$$\left[\left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot a\right]\cdot a + \left[\left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot b\right]\cdot b = 74\,900,$$
$$\left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot a + \left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot b = 71\,000,$$

a po úpravě

$$5\cdot\frac{xa}{6} + \frac{xb}{6} = 67\,000,$$
$$5\cdot\frac{xa}{6}\cdot a + \frac{xb}{6}\cdot b = 74\,900,$$
$$\frac{xa}{6} + 5\cdot\frac{xb}{6} = 71\,000.$$

Označíme-li $u = \frac{1}{6}xa$ a $v = \frac{1}{6}xb$, přejdou první a třetí rovnice v soustavu

$$5u + v = 67\,000,$$
$$u + 5v = 71\,000,$$

ze které vychází $u = 11\,000$ a $v = 12\,000$. Protože $a = 6u/x$ a $b = 6v/x$, lze druhou rovnici soustavy zapsat jako

$$\frac{5}{6}\cdot x\cdot\frac{36u^2}{x^2} + \frac{1}{6}\cdot x\cdot\frac{36v^2}{x^2} = 74\,900,$$

neboli

$$\frac{30u^2 + 6v^2}{x} = 74\,900,$$

odkud pro $u = 11\,000$ a $v = 12\,000$ vychází $x = 60\,000$, tudíž

$$\begin{aligned} a &= \frac{6u}{x} = \frac{66\,000}{60\,000} = 1{,}1, \\ b &= \frac{6v}{x} = \frac{72\,000}{60\,000} = 1{,}2. \end{aligned}$$

Hledaná částka je proto rovna

$$\left(\frac{1}{6} \cdot x \cdot a^2 + \frac{5}{6} \cdot x \cdot b^2\right) \text{ Kč} = (10\,000 \cdot 1{,}1^2 + 50\,000 \cdot 1{,}2^2) \text{ Kč} = 84\,100 \text{ Kč}.$$

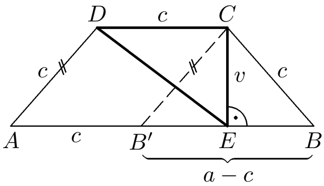
Návodné úlohy:

1. Banka má stálou roční úrokovou míru p %. Uložíme-li u této banky na začátku roku na účet částku a Kč, budeme mít na konci roku na účtu částku 25 200 Kč a na konci třetího roku pak již částku 27 783 Kč. Jakou částku budeme mít na účtu na konci druhého roku?
2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2ac^2 + 3bc^2 &= 36, \\ 3ac^2 + 2bc^2 &= 9, \\ ac + bc &= 3. \end{aligned}$$

4. *Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s výškou 3 cm a shodnými stranami BC, CD a DA, pro který platí: Na základně AB existuje takový bod E, že úsečka DE má délku 5 cm a dělí lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy.*

Řešení. *Rozbor*: Označíme-li $|AB| = a$, $|CD| = c$ a výšku lichoběžníku v (obr. 2),



Obr. 2

můžeme pro jeho obsah S psát

$$S = \frac{1}{2}(a + c)v.$$

Obsah trojúhelníku AED je podle zadání roven

$$\frac{|AE| \cdot v}{2} = \frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(a + c)v,$$

odkud plyne, že $|AE| = \frac{1}{2}(a+c)$ (tj. úsečka AE má délku stejnou jako střední příčka lichoběžníku $ABCD$). Protože bod E leží na úsečce AB, platí

$$|EB| = |AB| - |AE| = a - \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(a-c),$$

takže je $a > c$. Označíme-li B' bod úsečky AB, pro který je $|AB'| = c$, bude $|B'B| = a-c$, a protože hledaný lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný, je rovnoramenný i trojúhelník $B'BC$, takže střed E úsečky $B'B$ je zároveň patou výšky z vrcholu C na základnu AB (obr. 2). Pomocí Pythagorovy věty vypočteme, že

$$c = \sqrt{|DE|^2 - v^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}.$$

Popis konstrukce:

1. $\triangle DEC$; $|DC| = 4\,\mathrm{cm}$, $|CE| = 3\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ECD| = 90°$;
2. p; $p \parallel CD$, $E \in p$;
3. $k(D, 4\,\mathrm{cm})$, $l(C, 4\,\mathrm{cm})$;
4. A; $A \in p \cap k$, úhel ADC je tupý;
5. B; $B \in p \cap l$, úhel BCD je tupý.

Úloha má jediné řešení.

Návodné úlohy:

1. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jehož základny AB a CD mají délky $|AB| = 4v$ a $|CD| = 2v$, kde v je výška lichoběžníku, a jeho obsah je $48\,\mathrm{cm}^2$.
2. Je dán lichoběžník $ABCD$, kde $|BC| = |CD| = |DA|$. Na základně AB je dán bod E tak, že obsahy trojúhelníků AED, CDE a EBC jsou v poměru $3 : 2 : 1$. Určete velikosti vnitřních úhlů lichoběžníku $ABCD$.

5. *K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli čtyřmístné přirozené číslo n. Získali jsme čtyřmístné číslo s opačným pořadím číslic, než má číslo n. Určete všechny takové dvojice čísel m a n.*

Řešení. Nechť je číslo $n = \overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$, kde $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a \neq 0$. Číslo $m + n$ je čtyřmístné, proto je číslo m nejvýše čtyřmístné. Rozebereme jednotlivé případy podle počtu číslic m:

1. Číslo m je jednomístné, tj. $m = \overline{x} = x$, kde $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Podle zadání úlohy je jednak

$$m + n = 1\,000a + 100b + 10c + d + x,$$

jednak

$$m + n = 1\,000d + 100c + 10b + a.$$

Odtud postupně dostaneme

$$\begin{gathered} 1\,000a + 100b + 10c + d + x = 1\,000d + 100c + 10b + a, \\ x = 999(d-a) + 90(c-b). \end{gathered}$$

Pravá strana poslední rovnosti je dělitelná devíti, proto může být jedině $x = 9$. Po dosazení této hodnoty do rovnosti a vykrácení devíti vychází

$$
\begin{gathered}
1 = 111(d-a) + 10(c-b),\\
10(b-c) + 1 = 111(d-a).
\end{gathered}
$$

Z nerovností $-9 \leqq b-c \leqq 9$ plyne $-89 \leqq 10(b-c)+1 \leqq 91$. Mezi čísly -89 a 91 je jediný násobek 111, a to číslo 0, rovnost $10(b-c)+1 = 0$ však není možná. Žádné jednomístné číslo m tedy není řešením dané úlohy.

2. Číslo m je dvojmístné, tj. $m = \overline{xx} = 10x + x = 11x$, kde $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Analogicky jako v předchozím případě můžeme postupně psát

$$
\begin{gathered}
1\,000a + 100b + 10c + d + 11x = 1\,000d + 100c + 10b + a,\\
11x = 999(d-a) + 90(c-b).
\end{gathered}
$$

Pravá strana poslední rovnosti je dělitelná devíti, proto může být jedině $x = 9$. Potom je

$$
\begin{gathered}
11 = 111(d-a) + 10(c-b),\\
10(b-c) + 11 = 111(d-a).
\end{gathered}
$$

Zde je $-79 \leqq 10(b-c)+11 \leqq 101$, odkud plyne jediná možnost $10(b-c)+11 = 0$, která však neplatí pro žádné číslice b, c. Žádné dvojmístné číslo m tedy není řešením dané úlohy.

3. Číslo m je trojmístné, tj. $m = \overline{xxx} = 100x + 10x + x = 111x$, kde $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Opět můžeme psát

$$
\begin{gathered}
1\,000a + 100b + 10c + d + 111x = 1\,000d + 100c + 10b + a,\\
111x = 999(d-a) + 90(c-b),\\
37x = 333(d-a) + 30(c-b).
\end{gathered}
$$

Pravá strana poslední rovnosti je dělitelná třemi a číslo 37 není dělitelné třemi, proto musí být $x = 3$, nebo $x = 6$, nebo $x = 9$.

Nechť $x = 3$. Potom je

$$
\begin{gathered}
37 = 111(d-a) + 10(c-b),\\
10(b-c) + 37 = 111(d-a).
\end{gathered}
$$

Zde je $-53 \leqq 10(b-c)+37 \leqq 127$, odkud je buď $10(b-c)+37 = 0$, nebo $10(b-c)+37 = 111$. Ani jedna z posledních dvou rovností však není splněna pro žádné číslice b, c.

Nechť $x = 6$. Potom je

$$
\begin{gathered}
74 = 111(d-a) + 10(c-b),\\
10(b-c) + 74 = 111(d-a).
\end{gathered}
$$

Zde je $-16 \leqq 10(b-c)+74 \leqq 164$, odkud je buď $10(b-c)+74=0$, nebo $10(b-c)+74=111$. Ani jedna z posledních dvou rovností však není splněna pro žádné číslice b, c.

Nechť $x=9$. Potom je:

$$111 = 111(d-a) + 10(c-b),$$
$$10(b-c) = 111(d-a-1).$$

Zde je $-90 \leqq 10(b-c) \leqq 90$, odkud je jedině $10(b-c)=0$ a $111(d-a-1)=0$, tj. jedině $c-b=0$ a $d-a=1$. Řešením dané úlohy jsou tedy čísla $n \in \{\overline{1\,bb2}, \overline{2\,bb3}, \overline{3\,bb4}, \overline{4\,bb5}, \overline{5\,bb6}, \overline{6\,bb7}, \overline{7\,bb8}, \overline{8\,bb9}\}$ pro $b \in \{0,1,\dots,9\}$, tj. celkem 80 čísel. Číslo m je rovno 999.

4. Číslo m je čtyřmístné, tj. $m=\overline{xxxx}=1\,111x$, kde $x \in \{1,2,\dots,9\}$. Opět můžeme psát

$$1\,111x = 999(d-a) + 90(c-b).$$

Opět může být jedině $x=9$, což dává rovnost

$$10(b-c) + 1\,111 = 111(d-a).$$

Platí jednak $10(b-c)+1\,111 \geqq 1\,111-90=1\,021$, jednak $111(d-a) \leqq 999$. Proto žádné čtyřmístné číslo m není řešením dané úlohy.

Závěr: Úloha má 80 řešení, a to čísla $m=999$ a

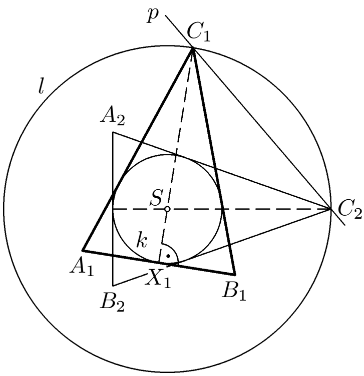
$$n \in \{\overline{1\,bb2}, \overline{2\,bb3}, \overline{3\,bb4}, \overline{4\,bb5}, \overline{5\,bb6}, \overline{6\,bb7}, \overline{7\,bb8}, \overline{8\,bb9}\} \quad \text{pro } b \in \{0,1,\dots,9\}.$$

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Najděte všechna trojmístná čísla m a n zapsaná stejnými číslicemi, avšak v opačném pořadí, pro něž platí $6m=5n$. [$m=495$]
2. Najděte všechna trojmístná čísla n taková, že poslední trojčíslí čísla n^2 je shodné s číslem n. [50–C–I–1]

6. *V rovině je dána přímka p a kružnice k. Sestrojte takový trojúhelník ABC, aby k byla kružnicí jemu vepsanou, její střed ležel ve čtvrtině jeho těžnice na stranu AB a aby vrchol C ležel na přímce p. Proveďte diskusi o počtu řešení v závislosti na vzájemné poloze přímky p a kružnice k.*

ŘEŠENÍ. *Rozbor*: Předpokládejme, že požadovaný trojúhelník ABC je sestrojen. Střed kružnice vepsané libovolnému trojúhelníku leží na osách jeho vnitřních úhlů. Podle zadání leží střed kružnice k na těžnici t_c trojúhelníku ABC, proto osa vnitřního úhlu při vrcholu C splývá s těžnicí t_c. Trojúhelník ABC je tedy rovnoramenný se základnou AB (obr. 3). Leží-li střed S kružnice k s poloměrem r ve čtvrtině těžnice t_c, leží tedy ve vzdálenosti r od strany AB a ve vzdálenosti $3r$ od vrcholu C. (Bod S nemůže mít od vrcholu C vzdálenost $\frac{1}{3}r$, neboť by bod C ležel ve vnitřní oblasti kružnice k, která je však trojúhelníku ABC vepsána, tudíž body A, B, C leží v její vnější oblasti.) Bod C je tedy průsečíkem přímky p a kružnice l se středem S a poloměrem $3r$.



Obr. 3

Popis konstrukce:

1. dáno: $k(S, r)$, p;
2. $l(S, 3r)$;
3. C; $C \in p \cap l$;
4. X; $X \in \rightarrow CS$, $|XC| = 4r$;
5. x; $x \perp XC$, $X \in x$;
6. tečny a, b z bodu C ke k (např. pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem CS);
7. A, B; $A \in x \cap b$, $B \in x \cap a$.

Diskuse pro případ, že pořadí vrcholů A, B, C je proti směru pohybu hodinových ručiček:

úloha má dvě řešení $\iff$ $|Sp| < 3r$,
úloha má jedno řešení $\iff$ $|Sp| = 3r$,
úloha nemá žádné řešení $\iff$ $|Sp| > 3r$.

Návodné úlohy:

1. Jsou dány kružnice $k(S, r)$ a $l(O, \varrho)$, $S \neq O$, $r > \varrho$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby kružnice k mu byla opsána a kružnice l vepsána.
2. Dokažte, že v trojúhelníku ABC, který není rovnoramenný ani rovnostranný, leží osa vnitřního úhlu vycházející z vrcholu C mezi těžnicí t_c a výškou v_c.

Poznámka. V letáku se zadáními úloh je bohužel úloha 6 kategorie C zadána chybně — v textu chybí podmínka, že *vrchol C má ležet na dané přímce p.* Upozorněte laskavě žáky na tento nedostatek.