52. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie A

1. Řekneme, že tři navzájem různá přirozená čísla tvoří součtovou trojici, je-li součet prvních dvou z nich roven číslu třetímu. Určete, jaký největší počet součtových trojic se může nacházet v množině dvaceti přirozených čísel.

2. V rovině jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že $S_2 \in k_1$ a $r_1 > r_2$. Společné tečny obou kružnic se dotýkají kružnice k_1 v bodech P a Q. Dokažte, že přímka PQ se dotýká kružnice k_2.

3. Zjistěte, pro které reálné číslo p mají rovnice

$$x^3 + x^2 - 36x - p = 0,$$
$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = 0$$

společný kořen.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie A se koná

v úterý 3. prosince 2002

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Pro libovolně vybraných dvacet přirozených čísel

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{20}$$

odhadneme, kolik mezi nimi může být součtových trojic, tedy trojic $\{x_i, x_j, x_k\}$ splňujících podmínky $1 \leqq i < j < k \leqq 20$ a $x_i + x_j = x_k$, a to nejprve při pevném indexu $k \in \in \{3, 4, \ldots, 20\}$. Nechť jsou to trojice $\{x_{i_1}, x_{j_1}, x_k\}$, $\{x_{i_2}, x_{j_2}, x_k\}$, …, $\{x_{i_p}, x_{j_p}, x_k\}$. Pak čísla

$$x_{i_1}, x_{j_1}, x_{i_2}, x_{j_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{j_p}$$

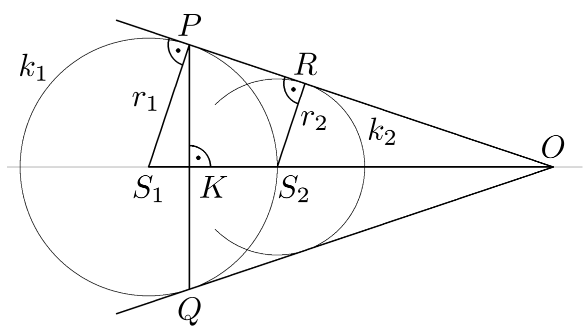
jsou navzájem různá a všechna leží v množině $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$, takže pro jejich počet $2p$ platí odhad $2p \leqq k-1$, odkud $p \leqq [\frac{1}{2}(k-1)]$ (kde $[a]$ značí celou část čísla a). Proto počet všech součtových trojic nemůže být číslo větší než součet

$$\sum_{k=3}^{20} \left[\frac{k-1}{2}\right] = 1+1+2+2+3+3+\ldots+9+9 = 90.$$

Příklad množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 20\}$ ukazuje, že počet 90 součtových trojic je dosažitelný, neboť při každém $k \in \{3, 4, \ldots, 20\}$ můžeme za číslo i vybrat libovolné číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, [\frac{1}{2}(k-1)]\}$; odpovídající celé číslo $j = k - i$ pak skutečně splňuje nerovnosti $i < j < k$, takže $\{i, j, k\}$ je součtová trojice ležící v M.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel uvede příklad vhodné množiny 20 čísel a vysvětlí, proč obsahuje 90 součtových trojic, nezdůvodní však, že větší počet možný není (nestačí napsat, že je to zřejmé!), udělte 3 body.

2. Ze souměrnosti společných tečen plyne, že body dotyku P a Q jsou souměrně sdružené podle přímky S_1S_2, takže platí $PQ \perp S_1S_2$. Přímka PQ proto bude tečnou ke kružnici k_2, když ukážeme, že průsečík K přímek PQ a S_1S_2 leží na kružnici k_2 (obr. 1). Označme ještě O průsečík obou tečen s přímkou S_1S_2 a R bod dotyku tečny PO s kružnicí k_2.



Obr. 1

Z podobných pravoúhlých trojúhelníků S_1OP a S_2OR plyne úměra

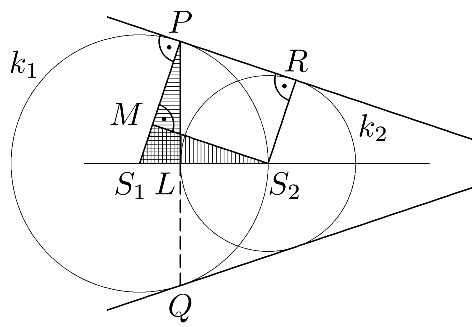
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{|S_1P|}{|S_2R|} = \frac{|S_1O|}{|S_2O|} = \frac{|S_1O|}{|S_1O| - r_1}, \quad \text{odkud} \quad |S_1O| = \frac{r_1^2}{r_1 - r_2}.$$

Z Eukleidovy věty o odvěsně S_1P trojúhelníku S_1OP proto vyplývá, že

$$r_1^2 = |S_1P|^2 = |S_1K| \cdot |S_1O| = |S_1K| \cdot \frac{r_1^2}{r_1 - r_2},$$

tudíž $|S_1K| = r_1 - r_2$, a proto $|S_2K| = |S_1S_2| - |S_1K| = r_1 - (r_1 - r_2) = r_2$. To znamená, že bod K skutečně leží na kružnici k_2 a důkaz tvrzení je hotov.

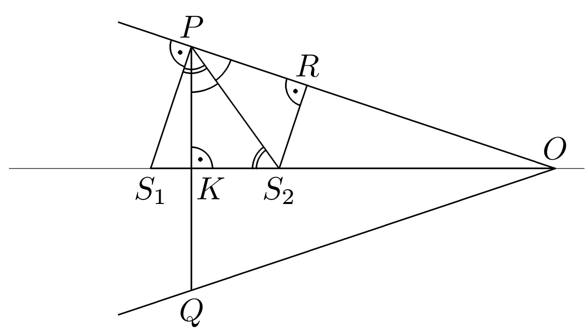
Jiné řešení. Označme L průsečík kružnice k_2 s úsečkou S_1S_2, M patu kolmice spuštěné z bodu S_2 na úsečku S_1P a R bod dotyku kružnice k_2 s tou společnou tečnou, která prochází bodem P (obr. 2). Protože S_2RPM je pravoúhelník, platí $|MP| = |S_2R| = r_2$,



Obr. 2

a proto $|S_1M| = |S_1P| - |MP| = r_1 - r_2$. Stejnou délku $r_1 - r_2$ má rovněž úsečka S_1L, neboť $r_1 = |S_1S_2|$ a $r_2 = |S_2L|$. Trojúhelníky S_1MS_2 a S_1LP mají tudíž shodné úhly při vrcholu S_1 i přilehlé strany, jsou proto shodné podle věty *sus*. Platí tedy nejen $S_1M \perp S_2M$, ale také $S_1L \perp PL$. Bod L ale leží na kružnici k_2, takže přímka PL je její tečnou, která s ohledem na souměrnost prochází rovněž bodem Q. Důkaz je ukončen.

Jiné řešení. Označme O průsečík obou tečen, K patu kolmice z bodu P na OS_1 (vzhledem k souměrnosti obou tečen podle spojnice S_1S_2 je to průsečík PQ s OS_1) a R patu kolmice z bodu S_2 na OP (obr. 3). Protože $|S_1P| = |S_1S_2| = r_1$, je $|\sphericalangle S_1PS_2| = |\sphericalangle S_1S_2P|$,



Obr. 3

proto

$$|\sphericalangle S_2PK| = 90^\circ - |\sphericalangle S_1S_2P| = \\ = 90^\circ - |\sphericalangle S_1PS_2| = |\sphericalangle S_2PR|,$$

takže pravoúhlé trojúhelníky KS_2P a RS_2P se shodují v přeponě S_2P a přilehlém úhlu u vrcholu P. Je tudíž $|S_2K| = |S_2R|$ a kružnice se středem S_2 a poloměrem $r_2 = |S_2R|$ se dotýká spojnice PQ v bodě K.

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. Levou stranu druhé rovnice upravíme na součin:

$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = x^2(x-2) - p(x-2) = (x-2)(x^2 - p).$$

Pro společný kořen x obou rovnic tedy platí $x = 2$ nebo $x^2 = p$. V prvním případě po dosazení do první rovnice dostaneme

$$2^3 + 2^2 - 36 \cdot 2 - p = 0, \quad \text{neboli} \quad p = -60;$$

ve druhém případě můžeme první rovnici zjednodušit na tvar $x^3 - 36x = 0$, odkud plyne $x = 0$ nebo $x = \pm 6$, a proto z podmínky $p = x^2$ vychází $p = 0$ respektive $p = 36$.

Dodejme, že po nalezení rozkladu levé strany druhé rovnice jsme mohli vypsat její kořeny $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{p}$ a po jejich postupném dosazení do první rovnice určit hledané hodnoty $p = -60$, $p = 0$ a $p = 36$.

Jiné řešení. Z první rovnice snadno vyjádříme $p = x^3 + x^2 - 36x$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme rovnici (bez parametru p), kterou musí splňovat společný kořen obou původních rovnic:

$$x^3 - 2x^2 - (x^3 + x^2 - 36x)x + 2(x^3 + x^2 - 36x) = 0.$$

Po úpravě dostaneme rovnici $x^4 - 2x^3 + 36x^2 - 72x = 0$, jejíž kořeny snadno určíme (jsou to totiž celá čísla) například postupným rozkladem:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 36x^2 - 72x &= x[x^2(x-2) + 36x(x-2)] = x(x-2)(x^2 - 36) = \\ &= x(x-2)(x-6)(x+6). \end{aligned}$$

Vidíme, že společným kořenem musí být jedno z čísel $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = -6$. Dosadíme-li je do původních rovnic, ihned zjistíme příslušné hodnoty p; jsou to čísla 0, -60 a 36 (poslední odpovídá oběma kořenům $x_{3,4} = \pm 6$).

Jiné řešení. Společné kořeny polynomů

$$P_1(x) = x^3 + x^2 - 36x - p, \quad P_2(x) = x^3 - 2x^2 - px + 2p$$

(pokud vůbec existují) jsou kořeny polynomu, který je největším společným dělitelem polynomů P_1 a P_2. Najdeme ho Eukleidovým algoritmem postupného dělení se zbytkem. V prvních dvou krocích dostaneme jako zbytky polynomy

$$\begin{aligned} P_3(x) &= P_1(x) - P_2(x) = 3x^2 + (p-36)x - 3p, \\ P_4(x) &= P_2(x) - \left(\frac{x}{3} + \frac{30-p}{9}\right) P_3(x) = (p-36)\left(\frac{(p-30)x}{9} - \frac{p}{3}\right). \end{aligned}$$

V případě, kdy $p = 36$, je algoritmus ukončen; největší společný dělitel je tehdy roven $P_3(x) = 3x^2 - 3 \cdot 36 = 3(x-6)(x+6)$, takže polynomy P_1, P_2 mají dva společné kořeny $x = \pm 6$. Dále proto předpokládejme, že $p \neq 36$. Jediný kandidát na společný kořen polynomů P_1, P_2 je kořen polynomu P_4, tedy číslo $x = 3p/(p-30)$. Stačí jen zjistit, kdy je toto číslo kořenem polynomu P_3. Protože

$$P_3\left(\frac{3p}{p-30}\right) = \frac{9p(p+60)}{(p-30)^2},$$

mají požadovanou vlastnost pouze hodnoty $p = 0$ a $p = -60$ (kterým odpovídá společný kořen $x = 0$ respektive $x = 2$).

Za úplné řešení udělte 6 bodů.