52. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie B

1. Najděte největší pětimístné přirozené číslo, které je dělitelné číslem 101 a které se čte zepředu stejně jako zezadu.

2. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme P průsečík jeho úhlopříček a Q průsečík spojnic středů jeho protějších stran. Leží-li bod Q na úhlopříčce BD, je bod P středem úhlopříčky AC. Dokažte.

3. Kolik různých výsledků můžeme dostat, sečteme-li každá dvě z daných pěti různých přirozených čísel? Pro každý možný počet uveďte příklad takové pětice čísel.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie B se koná

v úterý 28. ledna 2003

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

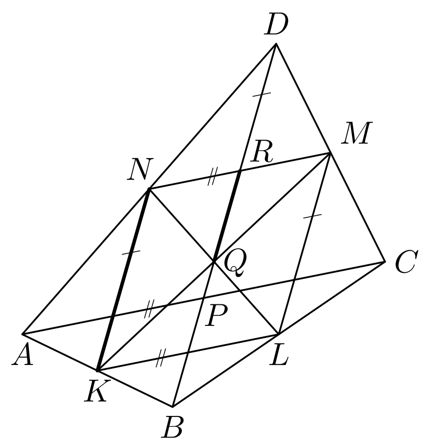
1. Libovolné z uvažovaných pětimístných čísel má dekadický zápis tvaru $\overline{abcba}$. Jeho rozvinutím a úpravou získáme rovnost

$$\overline{abcba} = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$

Odtud plyne, že zkoumané číslo je dělitelné 101, právě když $2a - c = 0$ (pro libovolné číslice a, c totiž jistě platí $|2a - c| < 101$). Z rovnosti $2a = c$ plyne $a \leqq 4$, a protože hledáme co největší takové číslo, zvolíme jeho první číslici $a = 4$, které odpovídá číslice $c = 8$. Protože číslice b nemá na dělitelnost číslem 101 vliv, zvolíme ji co největší: $b = 9$. Hledané číslo je tudíž 49 894.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

2. Středy stran čtyřúhelníku $ABCD$ označme K, L, M, N podle obrázku. Protože úsečky KL a MN jsou střední příčky trojúhelníků ABC resp. ACD, platí $KL \parallel AC \parallel MN$.



Obdobně platí $LM \parallel BD \parallel KN$, tudíž $KLMN$ je rovnoběžník a bod Q půlí úsečku KM. Všimněme si nyní trojúhelníku KMN. Středem Q jeho strany KM prochází podle předpokladu úlohy úhlopříčka BD, která je, jak víme, rovnoběžná s druhou stranou KN. Proto i střed R třetí strany MN leží na úhlopříčce BD. Protože úsečka MN je stejnolehlá s úsečkou CA podle středu D, půlí úhlopříčka BD nejen úsečku MN (v bodě R), ale i úsečku AC (v odpovídajícím bodě P).

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. Daná přirozená čísla označme podle velikosti $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Protože platí

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < x_2 + x_5 < x_3 + x_5 < x_4 + x_5,$$

je mezi všemi součty $x_i + x_j$ aspoň sedm různých hodnot. Nevypsány zůstaly pouze tři z možných součtů, a to součty $x_2 + x_3$, $x_2 + x_4$ a $x_3 + x_4$. Proto pro počet p možných hodnot uvažovaných součtů platí $7 \leqq p \leqq 10$.

Pro každou z hodnot $p \in \{7, 8, 9, 10\}$ uvedeme příklad pětiprvkové množiny M_p přirozených čísel, pro kterou uvažované součty nabývají právě p různých hodnot (jejich množinu označíme S_p):

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}_7 &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, & \mathsf{S}_7 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\};\\
\mathsf{M}_8 &= \{1, 2, 3, 4, 6\}, & \mathsf{S}_8 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\};\\
\mathsf{M}_9 &= \{1, 2, 3, 4, 7\}, & \mathsf{S}_9 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\};\\
\mathsf{M}_{10} &= \{1, 2, 3, 5, 8\}, & \mathsf{S}_{10} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}.
\end{aligned}$$

Za úplné řešení je 6 bodů. Za vysvětlení, proč $p \leqq 10$, udělte 1 bod, zdůvodnění nerovnosti $p \geqq 7$ oceňte 3 body.