52. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie C

1. Odtrhneme-li od libovolného alespoň dvojmístného přirozeného čísla číslici na místě jednotek, dostaneme číslo o jednu číslici „kratší“. Najděte všechna původní čísla, která se rovnají absolutní hodnotě rozdílu druhé mocniny „kratšího“ čísla a druhé mocniny odtržené číslice.

2. Na straně CD čtverce $ABCD$ je zvolen bod E tak, že úhel DAE má velikost 30°. Bod P je patou kolmice vedené bodem B na přímku AE, bod Q patou kolmice vedené bodem C na přímku BP. Rozhodněte, zda je obsah lichoběžníku $PQCE$ menší než třetina obsahu čtverce $ABCD$.

3. Z pěti jedniček, pěti dvojek, pěti trojek, pěti čtyřek a pěti pětek sestavíme pět pětimístných čísel, která se čtou zepředu stejně jako zezadu (např. 32 223), a pak tato čísla sečteme. Jakou nejmenší a jakou největší hodnotu může mít výsledný součet?

Školní – klauzurní část I. kola kategorie C se koná

v úterý 28. ledna 2003

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Označme hledané číslo $10a + b$, kde a, b jsou celá čísla, $a \geqq 1$, $0 \leqq b \leqq 9$. Podle zadání má platit

$$10a + b = |a^2 - b^2|.$$

Předpokládejme nejprve, že $a \geqq b$. V tom případě jednoduchými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} 10a + b &= a^2 - b^2, \\ a^2 - 10a + 25 &= b^2 + b + 25, \\ (a-5)^2 &= b^2 + b + 25. \end{aligned}$$

Do poslední rovnosti pak postupně dosazujeme $b = 0$, $b = 1$, …, $b = 9$ a zjišťujeme, zda výraz $b^2 + b + 25$ je druhou mocninou nějakého nezáporného celého čísla. Rovnici vyhovují dvojice $b = 0$, $a = 0$; $b = 0$, $a = 10$; $b = 7$, $a = 14$.

V případě, kdy $a < b$, obdobnými úpravami dostaneme

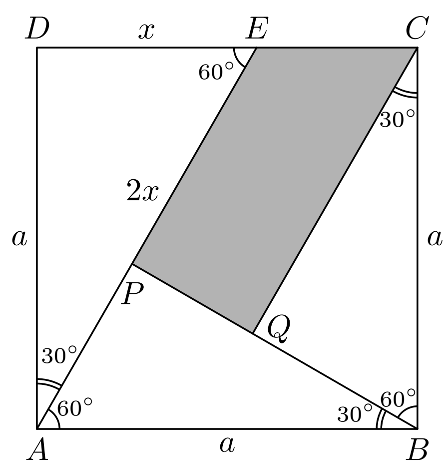
$$\begin{aligned} 10a + b &= b^2 - a^2, \\ a^2 + 10a + 25 &= b^2 - b + 25, \\ (a+5)^2 &= b^2 - b + 25 \end{aligned}$$

a podobně jako v prvním případě získáme dvojice $b = 0$, $a = 0$; $b = 1$, $a = 0$; $b = 8$, $a = 4$.

Závěr: S přihlédnutím k podmínkám zadání jsou řešením úlohy tři čísla 48, 100, 147.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 1 bod za náhodné nalezení jednoho nebo dvou čísel, 2 body za náhodné nalezení všech tří čísel. Za neúplnou diskusi strhněte 2 až 4 body.

2. Označme a délku strany čtverce $ABCD$. Trojúhelníky AED, BAP a CBQ jsou podobné podle věty uu, přičemž trojúhelníky BAP a CBQ jsou dokonce shodné (obr. 1). Trojúhelník AED je polovinou rovnostranného trojúhelníku o straně AE. Označíme-li $|ED| = x$, je $|AE| = 2x$.



Obr. 1

V pravoúhlém trojúhelníku AED platí $a = |AD| = \sqrt{|AE|^2 - |ED|^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$, odkud $x = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. (Velikost x můžeme také spočítat užitím goniometrického vzorce $x : a = |ED| : |AD| = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.)

Trojúhelníky BAP a CBQ jsou polovinami rovnostranného trojúhelníku o straně a. Rovnostranný trojúhelník o straně délky a má výšku $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ a jeho obsah je $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Součet obsahů trojúhelníků AED, BAP a CBQ je tudíž

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot a + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{5\sqrt{3}}{12}a^2.$$

Jelikož obsah čtverce $ABCD$ je a^2, je poměr obsahů lichoběžníku $PQCE$ a čtverce $ABCD$ roven

$$\frac{a^2 - \frac{5}{12}\sqrt{3}a^2}{a^2} = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{12},$$

což je číslo menší než 0,29.

Závěr: Obsah lichoběžníku $PQCE$ je menší než třetina obsahu čtverce $ABCD$.

Pro zajímavost uvedeme ještě jedno řešení, ve kterém ukážeme, že zkoumaný obsah lze odhadnout pomocí úvah o vzájemné poloze vhodných bodů (bez výpočtu délek a obsahu).

Jiné řešení. Protože nás zajímají jen poměry obsahů, můžeme předpokládat, že $ABCD$ je čtverec o straně 1. Ve středové souměrnosti podle středu O čtverce přejdou body E, P a Q v body, které označíme G, R a S (obr. 2). Z pravoúhlého trojúhelníku AED s úhlem 60° při vrcholu E plyne

$$|DE| = \frac{1}{2}|AE| > \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2},$$

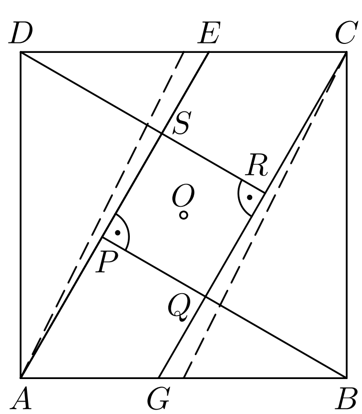
takže pro obsah rovnoběžníku $AGCE$ platí nerovnost

$$S(AGCE) < \frac{1}{2}.$$

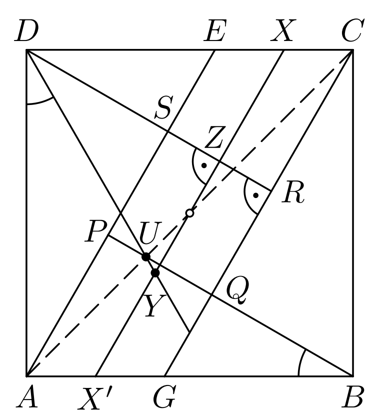
Zároveň se zdá, že shodné lichoběžníky $RCES$ a $AGQP$ mají větší obsah než čtverec $PQRS$. Pokud tomu tak opravdu je, musí být $S(RCES) > \frac{1}{3}S(AGCE)$, takže nutně platí

$$S(PQCE) = S(AGCE) - S(AGQP) = S(AGCE) - S(RCES) < \\ < \frac{2}{3}S(AGCE) < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Tím bude úloha vyřešena.



Obr. 2



Obr. 3

Strana SR čtverce $PQRS$ je současně výškou lichoběžníku $RCES$. Proto bude nerovnost $S(PQRS) < S(RCES)$ dokázána, když ověříme, že strana čtverce je kratší než střední příčka lichoběžníku. Tou je úsečka XZ, kde Z označuje střed úsečky SR, což je zároveň pata výšky rovnostranného trojúhelníku XYD (obr. 3). Označme U průsečík úhlopříčky AC daného čtverce s úsečkou PQ. Tímto bodem prochází i přímka DY, která je souměrně sdružená s přímkou BP právě podle osy AC, neboť $|\sphericalangle YDA| = |\sphericalangle ABP| = 30°$. To ovšem znamená, že bod Y, který je průsečíkem DU a XZ, leží vně čtverce $PQRS$! Proto je opravdu $|XZ| = |ZY| > |QR|$.

Obsah lichoběžníku $PQCE$ je tudíž menší než třetina obsahu čtverce $ABCD$.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 5 bodů buď za správné určení obsahu lichoběžníku $PQCE$, nebo za vhodný odhad, který postačí k rozhodnutí, která nerovnost je správná.

3. Označme a zapišme v desítkové soustavě pět pětimístných čísel, která se čtou zepředu stejně jako zezadu a jsou sestavena z daných číslic:

$$
\begin{aligned}
\overline{a_1b_1c_1b_1a_1} &= a_1 \cdot 10^4 + b_1 \cdot 10^3 + c_1 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + a_1,\\
\overline{a_2b_2c_2b_2a_2} &= a_2 \cdot 10^4 + b_2 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + b_2 \cdot 10 + a_2,\\
\overline{a_3b_3c_3b_3a_3} &= a_3 \cdot 10^4 + b_3 \cdot 10^3 + c_3 \cdot 10^2 + b_3 \cdot 10 + a_3,\\
\overline{a_4b_4c_4b_4a_4} &= a_4 \cdot 10^4 + b_4 \cdot 10^3 + c_4 \cdot 10^2 + b_4 \cdot 10 + a_4,\\
\overline{a_5b_5c_5b_5a_5} &= a_5 \cdot 10^4 + b_5 \cdot 10^3 + c_5 \cdot 10^2 + b_5 \cdot 10 + a_5.
\end{aligned}
$$

Mezi číslicemi c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 je právě jedna jednička, právě jedna dvojka, právě jedna trojka, právě jedna čtyřka a právě jedna pětka. Kdyby totiž na místě stovek uvažovaných pěti čísel chyběla např. jednička, musela by se na místech ostatních řádů vyskytovat v lichém počtu (pětkrát), což vzhledem k symetrii uvažovaných čísel není možné.

Pro součet S uvažovaných čísel tedy platí

$$
\begin{aligned}
S &= \overline{a_1b_1c_1b_1a_1} + \overline{a_2b_2c_2b_2a_2} + \overline{a_3b_3c_3b_3a_3} + \overline{a_4b_4c_4b_4a_4} + \overline{a_5b_5c_5b_5a_5} =\\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \cdot (10^4 + 1) + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) \cdot (10^3 + 10) +\\
&\quad + (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) \cdot 10^2 =\\
&= 10\,001 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + 1\,010 \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) +\\
&\quad + 100 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) =\\
&= 10\,001 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + 1\,010 \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + 1\,500.
\end{aligned}
$$

S ohledem na číslice, jež máme k dispozici, bude součet S nejmenší, jestliže bude

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9,\\
b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 &= 5 + 5 + 4 + 4 + 3 = 21.
\end{aligned}
$$

Nejmenší možný součet má tudíž hodnotu

$$S_{\min} = 10\,001 \cdot 9 + 1\,010 \cdot 21 + 1\,500 = 112\,719$$

a vznikne např. jako součet

$$S_{\min} = 13\,131 + 14\,241 + 24\,342 + 25\,452 + 35\,553.$$

Podobně bude součet S největší, pokud bude

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 5 + 5 + 4 + 4 + 3 = 21, \\
b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9.
\end{aligned}
$$

Největší možný součet má tudíž hodnotu

$$
S_{\max} = 10\,001 \cdot 21 + 1\,010 \cdot 9 + 1\,500 = 220\,611
$$

a vznikne např. jako součet

$$
S_{\max} = 53\,535 + 52\,425 + 42\,324 + 41\,214 + 31\,113.
$$

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za stanovení nejmenší možné hodnoty, 1 bod za sestavení konkrétních čísel, 2 body za stanovení největší možné hodnoty, 1 bod za sestavení konkrétních čísel. Pokud řešitel sestaví oba správné příklady, avšak nevysvětlí aspoň stručným komentářem, proč větší nebo menší součet nelze získat, udělte 4 body.