52. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie A

1. Najděte základy z všech číselných soustav, ve kterých je čtyřmístné číslo $(1001)_z$ dělitelné dvojmístným číslem $(41)_z$.

2. Uvnitř strany AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolte bod S tak, aby trojúhelník SXY, kde X a Y jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC, měl nejmenší možný obsah.

3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\log_x(y+z) = p,$$
$$\log_y(z+x) = p,$$
$$\log_z(x+y) = p$$

s neznámými x, y, z a nezáporným celočíselným parametrem p.

4. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $x_1 = 1$ splňuje pro každé $n > 1$ podmínku

$$x_n = x_{n-1}^{\pm 1} + x_{n-2}^{\pm 1} + \ldots + x_1^{\pm 1}$$

s vhodnou volbou znamének „+“ a „−“ v exponentech mocnin.

a) Rozhodněte, zda některý člen takové posloupnosti musí být větší než 1 000.

b) Zjistěte nejmenší možnou hodnotu členu $x_{1\,000\,000}$.

c) Dokažte, že nerovnost $x_n < 4$ nemůže platit pro devět členů x_n takové posloupnosti.

II. kolo kategorie A se koná

v úterý 14. ledna 2003

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Protože v zápisu dvojmístného čísla vystupuje číslice 4, nutně platí $z \geqq 5$. Z rozvinutých zápisů $(1001)_z = z^3 + 1$ a $(41)_z = 4z + 1$ vyplývá, že hledáme právě ta přirozená $z \geqq 5$, pro která je číslo z^3+1 násobkem čísla $4z+1$. Pomocí Eukleidova algoritmu najdeme jejich největší společný dělitel. Můžeme postupovat tak, že nejprve vydělíme oba výrazy jako mnohočleny a pak se „zbavíme“ zlomků:

$$z^3 + 1 = \left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4^2}z + \frac{1}{4^3}\right)(4z + 1) + \frac{63}{4^3}, \qquad / \cdot 4^3$$

$$4^3(z^3 + 1) = (16z^2 - 4z + 1)(4z + 1) + 63. \tag{1}$$

Protože čísla 4 a $4z + 1$ jsou nesoudělná, vidíme odtud, že číslo $4z + 1$ dělí číslo $z^3 + 1$, právě když dělí číslo 63, tedy právě když $4z + 1 \in \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$. Z podmínky $z \geqq 5$ ovšem plyne $4z + 1 \geqq 21$, takže $4z + 1 = 21$ (rovnice $4z + 1 = 63$ nemá celočíselné řešení) a $z = 5$.

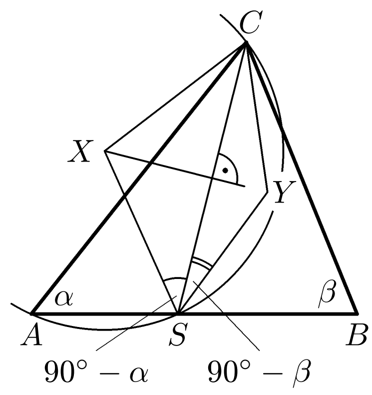
Poznámka. Rozklad (1) také snadno odhalíme, využijeme-li známý vzorec $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$: podle něj můžeme rovnou psát

$$4^3(z^3 + 1) = (4^3z^3 + 1) + 63 = (4z + 1)(16z^2 - 4z + 1) + 63.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Opomene-li řešitel podmínku $z \geqq 5$ a za řešení považuje i číslo $z = 2$ z rovnice $4z + 1 = 9$, strhněte 2 body. Rovněž tak strhněte 1 bod, chybí-li zkouška pro řešení $z = 5$ a je-li přitom podmínka $(4z + 1) \mid 63$ odvozena pouze jako nutná (nikoliv postačující jako v našem řešení). Za samotné odvození této podmínky udělte 4 body. Za pouhé sestavení podmínky $(4z + 1) \mid (z^3 + 1)$ nebo za pouhé uhodnutí řešení $z = 5$ udělte dohromady nejvýše 1 bod.

2. Vnitřní úhly trojúhelníku ABC označme jako obvykle α, β, γ.

Podle věty o obvodovém a středovém úhlu v kružnici opsané trojúhelníku ASC platí (obr. 1) $|\sphericalangle SXC| = 2\alpha$, tudíž úhel při základně SC rovnoramenného trojúhelníku SCX má velikost $|\sphericalangle XSC| = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$ (využili jsme předpokladu, že α je ostrý úhel). Analogicky se odvodí rovnost $|\sphericalangle YSC| = 90° - \beta$. Protože úhly při vrcholech A a C trojúhelníku ASC jsou ostré, je střed X vnitřním bodem úhlu ASC; obdobně je střed Y vnitřním bodem úhlu BSC. Proto lze vyjádřit velikost úhlu XSY jako součet velikostí úhlů XSC a YSC:



Obr. 1

$$|\sphericalangle XSY| = |\sphericalangle XSC| + |\sphericalangle YSC| = (90° - \alpha) + (90° - \beta) = \gamma.$$

Označíme-li ještě $\omega = |\sphericalangle ASC|$, pak pro poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC platí vzorce

$$|SX| = \frac{|AC|}{2\sin\omega} \quad \text{a} \quad |SY| = \frac{|BC|}{2\sin(180° - \omega)} = \frac{|BC|}{2\sin\omega},$$

které spolu s dříve určenou velikostí úhlu XSY vedou k následující závislosti mezi obsahy S_{SXY} a S_{ABC} trojúhelníků SXY a ABC:

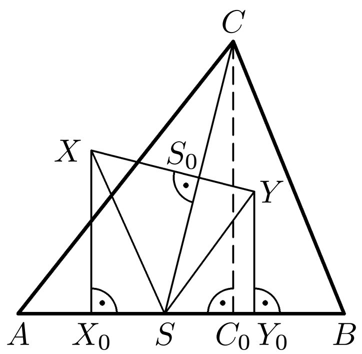
$$S_{SXY} = \frac{|SX| \cdot |SY| \cdot \sin |\sphericalangle XSY|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BC| \cdot \sin \gamma}{8 \sin^2 \omega} = \frac{S_{ABC}}{4 \sin^2 \omega}.$$

Odtud plyne nerovnost $S_{SXY} \geqq \frac{1}{4} S_{ABC}$, přičemž rovnost nastane, právě když $\sin \omega = 1$, neboli $\omega = 90°$. Obsah trojúhelníku SXY je proto nejmenší, právě když je bod S patou výšky z vrcholu C ke straně AB. (Tato pata je vnitřním bodem strany AB díky podmínce, že trojúhelník ABC je ostroúhlý.)

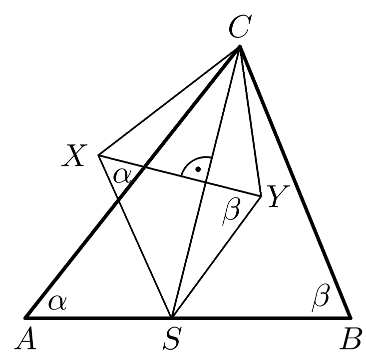
Jiné řešení. Středná XY obou opsaných kružnic protíná společnou tětivu CS v jejím středu S_0 a kolmé průměty X_0, Y_0 bodů X, Y na stranu AB jsou středy úseček AS, SB (obr. 2). Je tedy $|X_0Y_0| = \frac{1}{2}|AB|$ a pro obsah trojúhelníku SXY tudíž platí

$$\begin{aligned} S_{SXY} &= \frac{1}{2}|XY| \cdot |S_0S| \geqq \frac{1}{2}|X_0Y_0| \cdot |S_0S| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{1}{2}|CS| \geqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |CC_0| = \frac{1}{4} S_{ABC}, \end{aligned}$$

kde CC_0 je výška trojúhelníku ABC. Rovnost v první z předchozích dvou nerovností nastane, právě když $XY \parallel AB$, tj. právě když $CS \perp AB$, neboli $S = C_0$. A právě tehdy přejde v rovnost i druhá nerovnost.



Obr. 2



Obr. 3

Jiné řešení. Průsečíky C a S kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC jsou souměrně sdružené podle přímky XY, takže pro velikost úhlu SXY platí (obr. 3)

$$|\sphericalangle SXY| = \frac{1}{2}|\sphericalangle SXC| = \frac{1}{2} \cdot 2|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAC|,$$

obdobně $|\sphericalangle SYX| = |\sphericalangle ABC|$. Proto jsou trojúhelníky SXY a CAB podobné podle věty *uu*, takže jejich obsahy S_{SXY} a S_{ABC} jsou pomocí koeficientu podobnosti $k = |XS| : |AC|$ svázány rovností $S_{SXY} = k^2 S_{ABC}$. Protože úsečka AC je tětivou kružnice o poloměru $|XS|$, platí nerovnost $|AC| \leqq 2|XS|$, neboli $k \geqq \frac{1}{2}$; rovnost $k = \frac{1}{2}$ přitom nastane, jen když je strana AC průměrem kružnice opsané trojúhelníku ASC, což je ekvivalentní s podmínkou $CS \perp AB$. Tím je dokázána nerovnost $S_{SXY} \geqq \frac{1}{4} S_{ABC}$ i nalezena podmínka, kdy nastane rovnost.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za pouhé odvození podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle XYS$ udělte 4 body, podobně za důkaz rovnosti $|\sphericalangle XSY| = |\sphericalangle ACB|$ udělte 2 body.

3. Rovnice dané soustavy mají smysl, jen když jsou čísla x, y, z kladná a různá od 1. Pro taková čísla x, y, z (jiná dále neuvažujeme) dostáváme odlogaritmováním ekvivalentní soustavu rovnic

$$y + z = x^p, \quad z + x = y^p, \quad x + y = z^p. \tag{1}$$

Ukážeme nejprve, že v oboru $\mathsf{M} = (0, 1) \cup (1, \infty)$ je každé řešení soustavy (1) tvořeno trojicí stejných čísel. Využijeme k tomu známého poznatku, že pro $p \geqq 0$ je funkce $f(t) = t^p$ na množině kladných čísel t neklesající (přesněji: rostoucí pro $p > 0$ a konstantní pro $p = 0$). Připusťme naopak, že pro některé řešení (x, y, z) platí například $x < y$.

Odečtením prvních dvou rovnic z (1) dostaneme $y - x = x^p - y^p$. Z předpokladu $x < y$ ale plyne $x^p \leqq y^p$, takže $y - x > 0$ a zároveň $x^p - y^p \leqq 0$, což je ve sporu s předchozí rovností. Podobně odvodíme spor i v případě, kdy $x > y$, a v případech, kdy $x \neq z$ resp. $y \neq z$ (soustava (1) je totiž v neznámých x, y, z symetrická).

Soustava (1) se proto redukuje na rovnici $x + x = x^p$, kterou máme řešit v oboru $\mathsf{M} = (0, 1) \cup (1, \infty)$. Protože $x \neq 0$, dostáváme po dělení číslem x ekvivalentní rovnici $2 = x^{p-1}$. Tato rovnice nemá řešení pro $p = 1$, pro $p = 0$ má jediné řešení $x = \frac{1}{2}$, pro přirozené $p \geqq 2$ má jediné řešení $x = 2^{\frac{1}{p-1}}$, které lze pro $p \geqq 3$ zapsat jako $x = \sqrt[p-1]{2}$. (Čísla $\frac{1}{2}$ i $2^{\frac{1}{p-1}}$ zřejmě náležejí do M.)

Odpověď. Daná soustava má pro $p = 0$ jediné řešení $x = y = z = \frac{1}{2}$, pro $p = 1$ nemá řešení, pro přirozené $p \geqq 2$ má jediné řešení $x = y = z = 2^{\frac{1}{p-1}}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za důkaz tvrzení, že každé řešení dané soustavy splňuje podmínku $x = y = z$. Za pouhé vyřešení případu $p = 0$ udělte 1 bod.

4. Úvodem si všimneme, že v důsledku rovnosti $x_1 = 1$ platí

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^{\pm 1} = 1^{\pm 1} = 1, \\ x_3 &= x_2^{\pm 1} + x_1^{\pm 1} = 1^{\pm 1} + 1^{\pm 1} = 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Protože pro každé $x > 0$ jsou obě čísla x^{+1}, x^{-1} kladná, plyne odtud snadno matematickou indukcí, že nerovnost $x_n \geqq 1$ je splněna pro každé n. Je-li $x \geqq 1$, pak ovšem $0 < x^{-1} \leqq x^1$, a proto pro každé $n \geqq 4$ platí odhady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x_4} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} \leqq x_n \leqq 1 + 1 + 2 + x_4 + \ldots + x_{n-1}, \tag{2}$$

které využijeme ve všech třech částech řešení.

a) Dokážeme (sporem), že existuje k, pro něž $x_k > 10^3$. Připusťme naopak, že pro každé k platí opačná nerovnost $x_k \leqq 10^3$. Z levé nerovnosti v (2) pak pro každé $n > 4$ plyne odhad

$$x_n \geqq \frac{5}{2} + \underbrace{10^{-3} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-3}}_{(n-4)\text{ krát}} = \frac{5}{2} + (n-4) \cdot 10^{-3}.$$

Odtud ale vyplývá, že $x_n > 10^3$ pro každé $n > 10^6 + 4$, což je spor.

b) Dokážeme nejprve, že z pravých nerovností v (2) vyplývá odhad $x_n \leqq 2^{n-2}$ pro každé $n \geqq 2$. Využijeme indukci: pro $n = 2$ i pro $n = 3$ platí podle (1) rovnost $x_n = 2^{n-2}$;

nechť $n \geqq 4$ a nechť pro všechna $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ platí $x_k \leqq 2^{k-2}$, potom z (2) dostáváme

$$x_n \leqq 1 + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-3}) = 1 + (2^{n-2} - 1) = 2^{n-2}.$$

Tím je důkaz indukcí ukončen.

Dosadíme-li odhady $x_n \leqq 2^{n-2}$ do levé nerovnosti v (2), vyjde nám pro hodnotu x_{10^6} dolní odhad

$$x_{10^6} \geqq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{10^6-3}} = 3 - \frac{1}{2^{10^6-3}}.$$

To spolu s příkladem vyhovující posloupnosti

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_1 \quad (n \in \{2, 3, \ldots, 10^6 - 1\}), \\ x_{10^6} &= x_{10^6-1}^{-1} + x_{10^6-2}^{-1} + \ldots + x_2^{-1} + x_1^{-1}, \end{aligned}$$

ve které $x_n = 2^{n-2}$ pro každé $n \in \{2, 3, \ldots, 10^6 - 1\}$ a $x_{10^6} = 3 - 2^{3-10^6}$, ukazuje, že nejmenší možná hodnota členu x_{10^6} je rovna $3 - 2^{3-10^6}$.

c) Předpokládejme, že nerovnost $x_n < 4$ platí kromě tří hodnot $n \in \{1, 2, 3\}$ ještě pro některá další n, která označíme $n_4, n_5, n_6, \ldots$ tak, že $4 \leqq n_4 < n_5 < n_6 < \ldots$ (zatím ještě nevíme, zda jde o konečnou či nekonečnou posloupnost). Ukažme, že pro každé takové n_k jsou ve všech exponentech příslušné rovnosti

$$x_{n_k} = 1 + 1 + 2^{\pm 1} + x_4^{\pm 1} + x_5^{\pm 1} + \ldots + x_{n_k-1}^{\pm 1}$$

vybrána znaménka „minus“. Pro mocninu $2^{\pm 1}$ je to zřejmé, neboť $x_{n_k} < 4$; z téže nerovnosti dále plyne, že znaménko v exponentu kterékoli mocniny $x_j^{\pm 1}$ $(4 \leqq j \leqq n_k - 1)$ musí být vybráno tak, aby platilo

$$x_j^{\pm 1} < 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}.$$

Tato nerovnost však může být splněna pouze se znaménkem „minus“, neboť podle (2) máme $x_j \geqq 5/2$. Tím je tvrzení o výběru znamének dokázáno. Porovnáním dvou za sebou jdoucích rovností

$$\begin{aligned} x_{n_k} &= \frac{5}{2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \ldots + \frac{1}{x_{n_k-1}}, \\ x_{n_{k+1}} &= \frac{5}{2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \ldots + \frac{1}{x_{n_k-1}} + \frac{1}{x_{n_k}} + \ldots + \frac{1}{x_{n_{k+1}-1}} \end{aligned}$$

dostaneme pro všechna $k \geqq 4$ nerovnosti

$$x_{n_{k+1}} \geqq x_{n_k} + \frac{1}{x_{n_k}},$$

které s přihlédnutím k tomu, že funkce $f(t) = t + \frac{1}{t}$ je na intervalu $t \in \langle 1, \infty)$ rostoucí a že $x_{n_4} \geqq 2{,}5$, vedou postupně k odhadům

$$x_{n_5} \geqq f(2{,}5) = 2{,}9, \quad x_{n_6} \geqq f(2{,}9) > 3{,}24, \quad x_{n_7} > f(3{,}24) > 3{,}54,$$
$$x_{n_8} > f(3{,}54) > 3{,}82, \quad x_{n_9} \geqq f(3{,}82) > 4{,}08.$$

Poslední nerovnost je ale ve sporu s podmínkou $x_{n_k} < 4$ určující výběr indexů n_k. Proto nerovnost $x_n < 4$ nemůže platit pro devět indexů n.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho po 2 bodech za každou z částí a), b) a c). Za část c) udělte 0 bodů, dokáže-li řešitel pouze, že nerovnost $x_n < 4$ nemůže platit pro *prvních devět* členů x_n. Úvahy o škrtání členů nebo zvětšení či zmenšení jejich hodnot budou patrně vždy nekorektní či neúplné.