52. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie B

1. Určete největší počet po sobě jdoucích pětimístných přirozených čísel, mezi nimiž není žádný palindrom, tj. číslo, které se čte zepředu stejně jako zezadu.

2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, na jehož přeponě AB uvažujeme libovolný bod K. Kružnice sestrojená nad úsečkou CK jako nad průměrem protne odvěsny BC a CA ve vnitřních bodech, které označíme po řadě L a M. Rozhodněte, pro který bod K má čtyřúhelník $ABLM$ nejmenší možný obsah.

3. Určete všechna reálná čísla p, pro něž má rovnice

$$(x-1)^2 = 3|x| - px$$

právě tři různá řešení v oboru reálných čísel.

4. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako nad průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte.

II. kolo kategorie B se koná

v úterý 25. března 2003

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Mezi 109 po sobě jdoucími pětimístnými čísly

$$10\,902,\ 10\,903, \dots, 10\,999,\ 11\,000, \dots, 11\,009,\ 11\,010$$

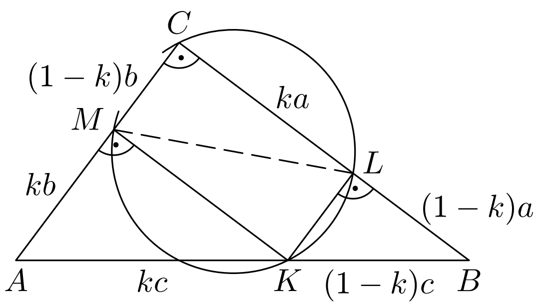
není žádný palindrom (je možné uvést i jiné vyhovující příklady 109 pětimístných čísel, my jsme vypsali skupinu nejmenších z nich).

Nejmenší a největší pětimístné palindromy jsou čísla 10 001 a 99 999; před číslem 10 001 je jen jedno pětimístné číslo, za číslem 99 999 už dokonce žádné takové číslo není. Ukážeme nyní, že za každým pětimístným palindromem x, $x \neq 99\,999$, následuje pětimístný palindrom $x+100$ nebo $x+110$ nebo $x+11$. Skutečně, je-li $x = \overline{abcba}$, pak v případě $c \neq 9$ je palindromem číslo $x + 100 = \overline{ab(c+1)ba}$, v případě $c = 9 \neq b$ je palindromem číslo $x + 110 = \overline{a(b+1)0(b+1)a}$, konečně v případě $c = b = 9$ (kdy nutně $a \neq 9$) je palindromem číslo $x + 11 = \overline{(a+1)000(a+1)}$.

Odpověď. Hledaný největší počet čísel je roven 109.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za vyhovující příklad 109 čísel a 4 body za vysvětlení, proč v každém úseku 110 pětimístných čísel je aspoň jeden palindrom. (Nejčastěji to bude výše uvedená úvaha, že rozdíl dvou sousedních palindromů je buď 11, 100, nebo 110.)

2. Protože úhly KLC, KMC a LCM jsou pravé (obr. 1), je čtyřúhelník $KLCM$ pravoúhelník a trojúhelníky AKM a KBL jsou podobné trojúhelníku ABC. Označme



Obr. 1

jako obvykle $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a položme $|AK| = kc$, kde $0 < k < 1$. Pak ovšem $|KB| = (1-k)c$ a ze zmíněné podobnosti trojúhelníků dostáváme vyjádření $|AM| = kb$, $|LC| = |KM| = ka$, $|BL| = (1-k)a$ a $|MC| = |KL| = (1-k)b$. Proto platí

$$\begin{aligned} S_{ABLM} &= S_{ABC} - S_{LMC} = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\cdot ka \cdot (1-k)b = \\ &= \frac{1}{2}ab(1-k+k^2) = \frac{1}{2}ab\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2}ab\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}S_{ABC}, \end{aligned}$$

přičemž rovnost $S_{ABLM} = \frac{3}{4}S_{ABC}$ nastane, právě když $k = \frac{1}{2}$, tedy právě když je bod K středem přepony AB.

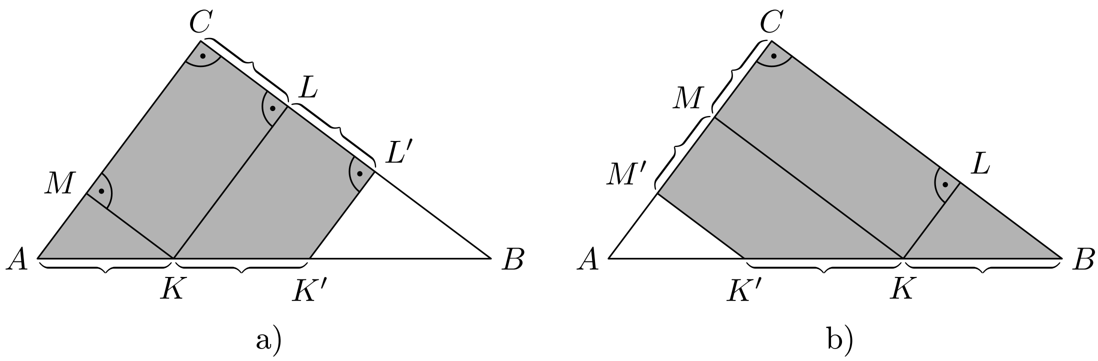
Jiné řešení. Čtyřúhelník $ABLM$ má minimální obsah, právě když má maximální obsah trojúhelník LMC, který je „polovinou“ pravoúhelníku $KLCM$. Stačí proto ukázat, že obsah S_{KLCM} je maximální, právě když je bod K středem přepony AB (kdy zřejmě $S_{KLCM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$). Je-li bod K vybrán tak, že $|AK| < \frac{1}{2}|AB|$, je úsečka KL střední příčkou lichoběžníku $AK'L'C$, který má o $S_{K'L'B}$ menší obsah než trojúhelník ABC (obr. 2a), takže platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2}S_{AK'L'C} < \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Je-li naopak $|AK| > \frac{1}{2}|AB|$, využijeme obdobný lichoběžník $BK'M'C$ (obr. 2b) a usoudíme, že platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2}S_{BK'M'C} < \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Tím je tvrzení o maximálním obsahu S_{KLCM} dokázáno.



Obr. 2

Odpověď. Čtyřúhelník $ABLM$ má nejmenší možný obsah, právě když bod K leží uprostřed přepony AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Odvodí-li řešitel pouze funkční vyjádření jednoho z obsahů S_{ABLM}, S_{LMC}, S_{KLCM}, které by umožnilo nalézt jeho extrémní hodnotu, udělte 3 body. Udělte 1 bod, je-li správná odpověď pouze uhodnuta nebo zcela chybně zdůvodněna.

3. I když lze danou úlohu řešit názorně geometrickou úvahou o vzájemné poloze paraboly $y = (x-1)^2$ a lomené čáry $y = 3|x| - px$, dáme nejprve přednost čistě algebraickému postupu.

Daná rovnice zřejmě nemá řešení $x = 0$. Po odstranění absolutní hodnoty a snadné úpravě dostaneme rovnice

$$x^2 + (p+1)x + 1 = 0 \qquad \text{pro } x < 0, \tag{1}$$
$$x^2 + (p-5)x + 1 = 0 \qquad \text{pro } x > 0. \tag{2}$$

Protože každá kvadratická rovnice má nejvýše dva různé kořeny, hledáme všechna ta čísla p, pro která má jedna z rovnic (1), (2) jeden kořen a druhá dva různé kořeny (a to vždy předepsaných znamének). Všimněme si, že pro každé $q \in \mathbb{R}$ mají reálné kořeny $x_{1,2}$ rovnice $x^2 + qx + 1 = 0$ (pokud vůbec existují) stejné znaménko, které je opačné než znaménko čísla q; platí totiž $x_1 x_2 = 1$ a $x_1 + x_2 = -q$. Pro rovnice (1), (2) tak předně dostáváme podmínky

$$p + 1 > 0 \quad \text{a} \quad p - 5 < 0, \quad \text{neboli} \quad p \in (-1, 5).$$

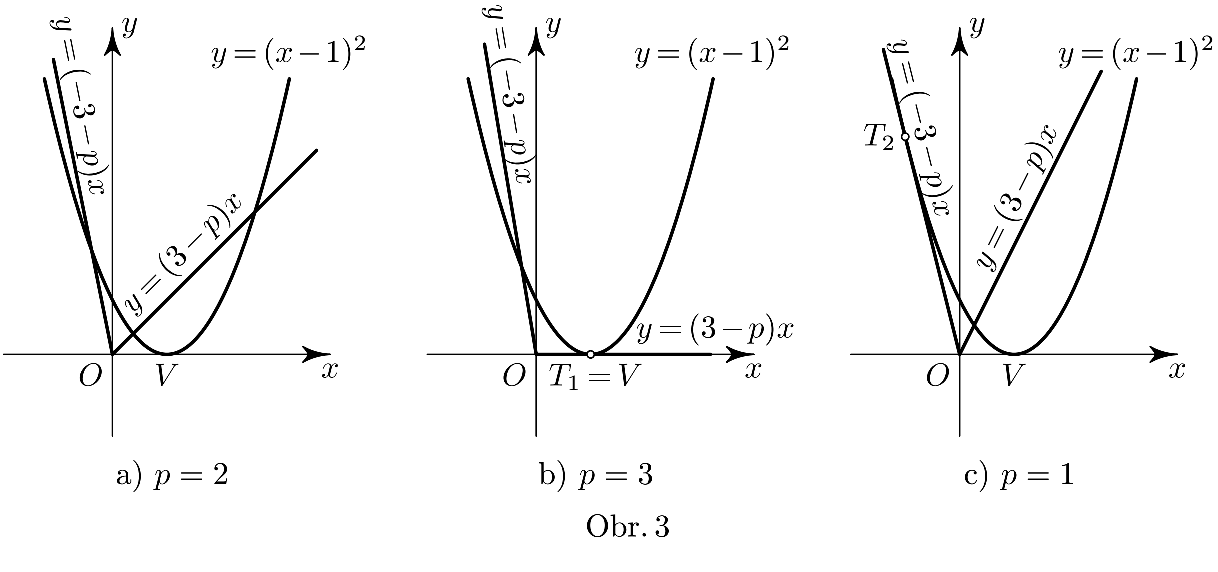
Kromě toho už jen požadujeme, aby pro diskriminanty obou rovnic

$$D_1 = (p+1)^2 - 4, \quad D_2 = (p-5)^2 - 4$$

platilo buď $D_1 = 0$ a $D_2 > 0$, nebo $D_1 > 0$ a $D_2 = 0$. Rovnost $D_1 = 0$ platí pouze pro $p \in \{-3, 1\}$, rovnost $D_2 = 0$ pouze pro $p \in \{3, 7\}$. Z těchto čtyř hodnot leží v intervalu $(-1, 5)$ pouze čísla $p = 1$ a $p = 3$, přičemž pro $p = 1$ vychází $D_2 = 12 > 0$, pro $p = 3$ zase $D_1 = 12 > 0$.

Odpověď. Hledané hodnoty jsou $p = 1$ a $p = 3$.

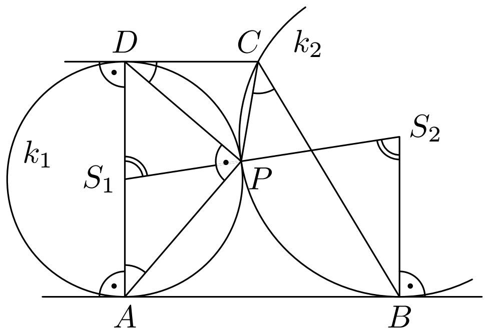
Jiné řešení. Grafem funkce $y = (x-1)^2$ je parabola s vrcholem $V[1, 0]$, grafem funkce $y = 3|x| - px$ je lomená čára tvořená rameny některého úhlu s vrcholem $O[0, 0]$ (obr. 3a pro $p = 2$). Oba grafy mají společné tři body, právě když jedno z ramen zmíněného úhlu je tečnou paraboly a druhé je její „sečnou“. Protože zkoumaná parabola nemá tečnu rovnoběžnou s osou y, můžeme rovnice obou tečen procházejících bodem $[0, 0]$ hledat ve tvaru $y = kx$. Jak je známo, směrnice k se určí z podmínky, že rovnice $kx = (x-1)^2$ má dvojnásobný kořen, tedy nulový diskriminant. Ten má vyjádření $(k+2)^2 - 4$, takže hledané hodnoty jsou $k_1 = 0$, $k_2 = -4$ a odpovídající body dotyku $T_1 = V[1, 0]$ a $T_2[-1, 4]$. Z rovnic pro směrnice tečných ramen zkoumaných úhlů $3 - p = 0$ a $-3 - p = -4$ najdeme řešení $p_1 = 3$ a $p_2 = 1$ a snadno se přesvědčíme, že druhé rameno je v obou případech skutečně sečnou paraboly (obr. 3b pro $p = 3$ a obr. 3c pro $p = 1$).



Obr. 3

Za úplné řešení je 6 bodů. Při řešení uvedeným algebraickým postupem udělte 1 bod za sestavení rovnic (1) a (2), k tomu přidejte 3 body za určení hodnot $p \in \{-3, 1, 3, 7\}$, kdy je jeden z diskriminantů rovnic (1) a (2) nulový a druhý kladný. Chybí-li zkouška nebo úvaha o znaménkách kořenů rovnic (1) a (2), což se projeví zejména tím, že řešitel nevyloučí hodnoty $p = -3$ a $p = 7$, udělte celkem nejvýše 4 body.

4. Označme S_1 a S_2 středy uvažovaných kružnic (obr. 4). Obě úsečky S_1A a S_2B jsou kolmé na přímku AB, jsou tudíž rovnoběžné a střídavé úhly PS_2B a PS_1D shodné. Podle



Obr. 4

věty o obvodových a střídavých úhlech proto platí

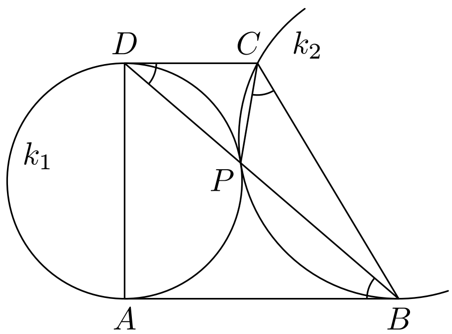
$$|\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\sphericalangle PS_1D| = |\sphericalangle PAD|.$$

Oba úhly APD a ADC jsou však pravé, tudíž

$$|\sphericalangle PAD| = 90^\circ - |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CDP|.$$

Dohromady dostáváme, že úhly PCB a CDP jsou shodné, což podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu znamená, že přímka BC je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku CDP.

Jiné řešení. Ve stejnolehlosti se středem P, při které kružnice k_1 přejde v kružnici k_2, musí tečna CD kružnice k_1 přejít v rovnoběžnou tečnu AB kružnice k_2, přitom se bod dotyku D zobrazí do bodu dotyku B. Bod P tudíž leží na úhlopříčce BD (obr. 5).[1] Odtud plyne shodnost střídavých úhlů CDP a PBA (mezi rovnoběžkami AB a CD). Úhel PBA



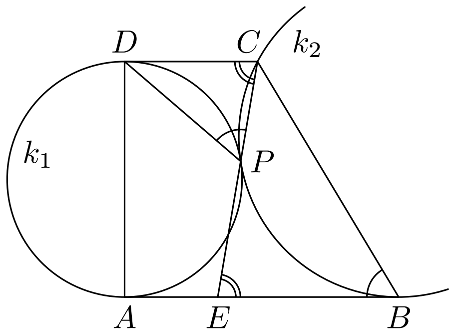
Obr. 5

je ale úsekový úhel mezi tětivou BP a tečnou AB kružnice k_2, je tedy shodný s příslušným

[1] Poznatek $P \in BD$ nemusí řešitelé dokazovat, když se odvolají na řešení úlohy domácího kola B–52–I–5, viz následnou Poznámku.

obvodovým úhlem PCB. Úhly CDP a PCB jsou proto shodné, což jsme potřebovali dokázat (viz závěr předchozího řešení).

Poznámka. Někteří řešitelé se možná odvolají na úlohu B–52–I–5, která se zabývala stejnou situací a podle které jsou shodné úhly ABC a CPD (obr. 6). Protože jsou shodné



Obr. 6

i střídavé úhly PEB a PCD, kde E je průsečík polopřímky CP se stranou AB, lze kýženou shodnost úhlů CDP a PCB odvodit z trojúhelníků BCE a PDC. Řešení, která se odvolají na shodnost úhlů ABC a CPD na základě úlohy domácího kola, je nutno považovat za úplná.

Za úplné řešení je 6 bodů.