52. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie C

1. Najděte nejmenší přirozené číslo n, pro které je součin

$$2\,003 \cdot 2\,004 \cdot 2\,005 \cdot \ldots \cdot (2\,003 + n)$$

dělitelný všemi dvojmístnými prvočísly.

2. V rovině je dána úsečka AP. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ tak, aby bod P byl středem jeho strany DE.

3. Kdyby Karel půjčil jednomu známému p tisíc Kč s úrokem $p\,\%$ a druhému známému q tisíc Kč s úrokem $q\,\%$, kde p a q jsou celá čísla, přinesly by obě půjčky Karlovi stejný zisk, jako kdyby jedné osobě půjčil celkovou částku s úrokem $(p+2{,}4)\,\%$. Kdyby půjčil jednomu známému p tisíc Kč s úrokem $2p\,\%$ a druhému známému q tisíc Kč s úrokem $2q\,\%$, přinesly by mu tyto půjčky stejný zisk, jako kdyby jedné osobě půjčil celkovou částku s úrokem $(p + 5{,}8)\,\%$. Určete čísla p a q.

4. Určete délku ramen rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 10 a 12 tak, aby délky všech jeho stran i úhlopříček byly vyjádřeny celými čísly.

II. kolo kategorie C se koná

v úterý 25. března 2003

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

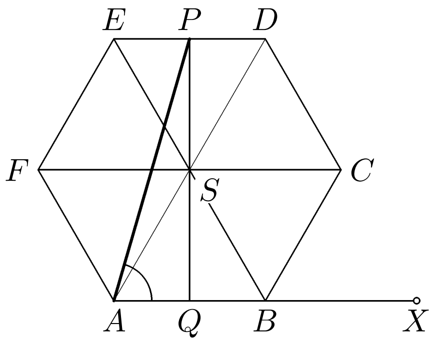
1. Pro každé z dvojmístných prvočísel 97, 89, 83, 79, 73, ... hledáme jeho nejmenší násobek, který převyšuje číslo 2 003. Vzhledem k tomu, že mezi k po sobě jdoucími celými čísly je právě jedno dělitelné k, a protože je $97 \cdot 21 = 2\,037$, $89 \cdot 23 = 2\,047$, $83 \cdot 25 = 2\,075$, $79 \cdot 26 = 2\,054$, musí být $2\,003 + n \geqq 2\,075$, tedy $n \geqq 72$. Pro takové n máme zaručeno, že pro každé z prvočísel 97, 89, 83, 79 je mezi čísly 2 003, 2 004, 2 005, ..., $2\,003 + n$ aspoň jedno jím dělitelné.

Mezi uvedenými 73 čísly 2 003 až 2 075 je vždy aspoň jedno dělitelné prvočíslem 73, aspoň jedno dělitelné prvočíslem 71 atd.

Hledané číslo n je tedy 72.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za stanovení podmínky, že n je aspoň 72, a 3 body za podmínku, že n je nejvýše 72.

2. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ se středem S, v němž Q je střed strany AB a P je střed strany DE, známe velikost úhlu PAQ (obr. 1), neboť všechny pravidelné



Obr. 1

šestiúhelníky jsou navzájem podobné. V pravoúhlém trojúhelníku APQ tedy známe délku přepony AP a velikosti dvou úhlů (AQP je pravý úhel). Odtud vyplývá postup *konstrukce*:

1. úsečka AP,
2. Thaletova kružnice k nad průměrem AP,
3. polopřímka AX, jež svírá s úsečkou AP úhel velikosti PAQ (ten sestrojíme pomocí libovolného pravidelného šestiúhelníku),
4. bod Q jako průsečík kružnice k s polopřímkou AX,
5. střed S úsečky PQ,
6. kružnice se středem S a poloměrem $|SQ|$,
7. pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$.

Úloha má dvě řešení souměrně sdružená podle osy AP podle toho, v které polorovině s hraniční přímkou AP sestrojíme polopřímku AX (bod 3 konstrukce).

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za rozbor, 2 body za popis konstrukce, 2 body za diskusi.

3. V prvním případě platí

$$1\,000p \cdot \frac{p}{100} + 1\,000q \cdot \frac{q}{100} = 1\,000(p+q) \cdot \frac{p+2{,}4}{100},$$

v druhém případě platí

$$1\,000p \cdot \frac{2p}{100} + 1\,000q \cdot \frac{2q}{100} = 1\,000(p+q) \cdot \frac{p+5{,}8}{100}.$$

Úpravou obou rovnic získáme soustavu

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= (p+2{,}4)(p+q), \qquad (1)\\ 2p^2 + 2q^2 &= (p+5{,}8)(p+q). \end{aligned}$$

Protože levá strana druhé rovnice je dvojnásobkem levé strany první rovnice, musí platit

$$2(p+2{,}4)(p+q) = (p+5{,}8)(p+q).$$

Odtud po vykrácení nenulovým výrazem $p+q$ vychází $p=1$. Dosazením této hodnoty např. do rovnice (1) a po úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$q^2 - 3{,}4q - 2{,}4 = 0.$$

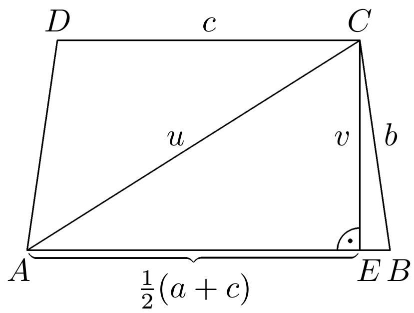
Protože hledáme celočíselné kořeny, přepíšeme rovnici do tvaru

$$q(5q-17) = 12$$

a snadno zjistíme, že mezi děliteli čísla 12 rovnici vyhovuje jedině $q=4$.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za sestavení rovnic podle podmínek úlohy.

4. Označme E patu kolmice spuštěné z vrcholu C na základnu AB rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ a jednotlivé délky úseček označme takto (obr. 2): $|AB| = a = 12$, $|BC| = b$, $|CD| = c = 10$, $|AC| = u$, $|CE| = v$. Potom je $|BE| = \frac{1}{2}(a-c) = 1$, $|AE| = \frac{1}{2}(a+c) = 11$.



Obr. 2

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelníky AEC a EBC můžeme tedy psát

$$v^2 = u^2 - 11^2 = b^2 - 1^2, \tag{1}$$

neboli

$$u^2 - b^2 = 11^2 - 1^2 = 120.$$

Odtud je vidět, že čísla u a b jsou zároveň obě sudá, nebo obě lichá, proto v rozkladu

$$(u - b)(u + b) = 120 = 2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12$$

přicházejí v úvahu jen uvedené rozklady čísla 120 na sudé činitele.

Uvedeným rozkladům pak odpovídají čtyři soustavy rovnic pro neznámé u a b:

$$\begin{aligned} u - b &= 2, & u - b &= 4, & u - b &= 6, & u - b &= 10,\\ u + b &= 60; & u + b &= 30; & u + b &= 20; & u + b &= 12. \end{aligned}$$

Jejich řešením (nejlépe tak, že vždy odečteme druhou rovnici od prvé) dostaneme pro délku ramene b lichoběžníku $ABCD$ čtyři možnosti, $b \in \{29, 13, 7, 1\}$. Z rovnosti (1) ovšem vidíme, že musí být $b > 1$, úloze tedy vyhovují jen první tři hodnoty.

Odpověď. Možná délka ramene lichoběžníku je buď 7, nebo 13, nebo 29.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za každé chybějící řešení odečtěte dva body. Ty odečtěte i za chybně uvedené řešení $b = 1$.