52. ročník matematické olympiády,
III. kolo kategorie A

Liberec, 30. března - 2. dubna 2003

1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$x^2 - xy + y^2 = 7,$$
$$x^2y + xy^2 = -2.$$

(J. Földes)

Řešení. Protože druhou rovnici můžeme upravit na tvar $xy(x+y) = -2$, upravme podobně i první rovnici: $(x+y)^2 - 3xy = 7$. Pro čísla $s = x+y$, $p = xy$ tak dostáváme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned} s^2 - 3p &= 7,\\ sp &= -2, \end{aligned} \tag{1}$$

která po vyjádření $p = -2/s$ (zřejmě nemůže být $s = 0$) z druhé rovnice vede na kubickou rovnici $s^3 - 7s + 6 = 0$. Ta má celočíselné kořeny $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ a $s_3 = -3$. Nalezeným hodnotám s odpovídají tyto hodnoty součinu $p = xy$: $p_1 = -2$, $p_2 = -1$, $p_3 = \frac{2}{3}$. Čísla x, y tvoří dvojici kořenů kvadratické rovnice $t^2 - st + p = 0$, takže se jedná o jednu z rovnic

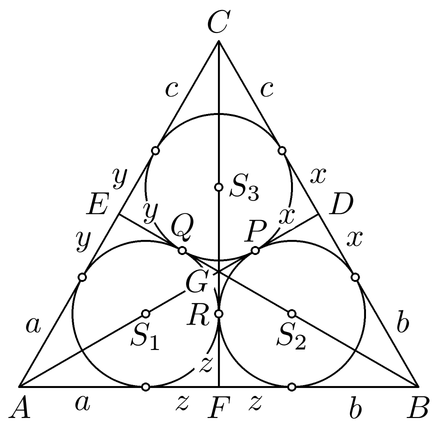
$$t^2 - t - 2 = 0, \quad t^2 - 2t - 1 = 0, \quad t^2 + 3t + \frac{2}{3} = 0.$$

Jejich řešením dostaneme (všech) šest řešení dané soustavy:

$$\{x,y\} = \{-1,2\},\ \{x,y\} = \left\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\},\ \{x,y\} = \left\{\frac{-9+\sqrt{57}}{6}, \frac{-9-\sqrt{57}}{6}\right\}.$$

2. *Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC zvolíme po řadě body D, E, F tak, aby se úsečky AD, BE, CF protľaly v jednom bodě, který označíme G. Pokud lze čtyřúhelníkům $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte.* *(M. Tancer)*

Řešení. Předpokládejme, že zmíněné čtyřúhelníky mají uvedenou vlastnost. Ze souměrnosti tečen *z daného bodu k dané kružnici* vyplývá, že strany trojúhelníku ABC jsou rozděleny body D, E, F a body dotyku kružnic vepsaných uvažovaným čtyřúhelníkům na úseky délek, jež označíme podle obr. 1. Jsou na něm rovněž vyznačeny body P, Q, R vzájemného dotyku zmíněných kružnic. Naším cílem je dokázat rovnosti $x = y = z$ a $a = b = c$.



Obr. 1

Pro úseky tečen z bodu A ke kružnicím při straně BC platí rovnosti $a + 2z = |AP| = a + 2y$, odkud ihned plyne $y = z$; z důvodů symetrie tudíž skutečně platí $x = y = z$. (Všude dále budeme psát x namísto y a z.) Všimněme si nyní trojúhelníků AEG a AFG. Mají společnou stranu AG a shodné strany AF a AE (délky $a+x$). Také jejich třetí strany EG a FG jsou shodné:

$$|EG| = |EQ| + |QG| = x + |RG| = |FR| + |RG| = |FG|.$$

Proto $\triangle AEG \simeq \triangle AFG$ podle věty *sss*, tudíž úhly BAD a CAD jsou shodné a polopřímka AD je osou úhlu BAC. Jak víme, osa úhlu trojúhelníku protíná protější stranu v poměru délek přilehlých stran. V našem případě to znamená, že

$$\frac{a + 2x + b}{a + 2x + c} = \frac{b + x}{c + x}.$$

Snadnou úpravou dostaneme rovnost $(b - c)(a + x) = 0$, ze které vidíme, že $b = c$. Z důvodů symetrie tudíž platí $a = b = c$ a celý důkaz je hotov.

Jiné řešení. Označme S_1, S_2, S_3 středy vepsaných kružnic (obr. 1). Stejně jako v předchozím řešení si nejprve všimneme, že platí $x = y = z$ a že trojúhelníky AEG a AFG jsou shodné. K tomu jsme využili rovnost $|GQ| = |GR|$, ze které plyne, že podle věty *sss* jsou shodné i trojúhelníky S_1QG a S_1RG. Jelikož $R \in S_1S_2$ a $Q \in S_1S_3$, ze souměrnosti podle osy AD nyní plyne, že přímky AB a S_1S_2 svírají stejný úhel jako přímky AC a S_1S_3, a protože kolmé průměty úseček S_1S_2 a S_1S_3 na odpovídající přímky AB, resp. AC jsou shodné (mají délku $2x$), je $|S_1S_2| = |S_1S_3|$. Analogicky $|S_1S_2| = |S_2S_3|$, takže trojúhelník $S_1S_2S_3$ je rovnostranný. Odtud pro poloměry r_1, r_2 a r_3 vepsaných kružnic plyne $r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_1$, neboli $r_1 = r_2 = r_3$. Kružnice jsou tedy shodné, takže je $AB \parallel S_1S_2$, $BC \parallel S_2S_3$ a $CA \parallel S_3S_1$ a trojúhelník ABC je rovnostranný.

Poznámka. K dokončení předchozího důkazu můžeme úvahu o délkách úseček S_iS_j nahradit úvahou o tzv. *orientovaných úhlech* mezi přímkami. Orientovaný úhel $\langle p, q\rangle$ přímek p, q (v tomto pořadí) je úhel, o který musíme v kladném směru otočit přímku q, aby byla rovnoběžná s přímkou p. Přitom $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$, právě když $\langle p, q\rangle$ je násobek $90°$. Ze souměrnosti podle os AD, BE a CF tak postupně dostáváme $\langle S_1S_3, AC\rangle = \langle AB, S_1S_2\rangle = \langle S_2S_3, BC\rangle = \langle AC, S_1S_3\rangle$. Protože obě odpovídající kružnice se středy S_1, S_3 mají společnou tečnu AC a leží v téže polorovině určené přímkou AC, znamená to, že S_1S_3 a AC jsou rovnoběžné.

---

3. *Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $x_1 = 1$ splňuje pro každé $n > 1$ podmínku*

$$x_n = \pm(n-1)x_{n-1} \pm (n-2)x_{n-2} \pm \ldots \pm 2x_2 \pm x_1$$

s vhodnou volbou znamének „+“ a „−“. Rozhodněte, zda je možné, aby nerovnost $x_n \neq 12$ platila pouze pro konečně mnoho indexů n. (P. Černek)

Řešení. Pokud se nám podaří sestavit podle daného pravidla $(k+3)$-člennou posloupnost

$$x_1 = 1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = x_{k+3} = 12,$$

můžeme všechny následující členy $x_{k+4}, x_{k+5}, x_{k+6}, \ldots$ definovat tak, aby se rovněž rovnaly číslu 12. Skutečně, s ohledem na matematickou indukci stačí ukázat, jak s vytčeným cílem vybrat znaménka v rovnosti určující člen x_{k+4}. Položme

$$\begin{aligned} x_{k+4} = {} & +12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k \pm \\ & \pm (k-1)x_{k-1} \pm (k-2)x_{k-2} \pm \ldots \pm x_1, \end{aligned}$$

přitom znaménka v druhém řádku vybereme přesně taková, jaká byla v součtu určujícím člen $x_k = 12$. Pak se součet v druhém řádku rovná 12, takže vychází

$$x_{k+4} = 12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k + 12 = 12.$$

Vhodný příklad pro $k = 8$ vypadá takto: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$,

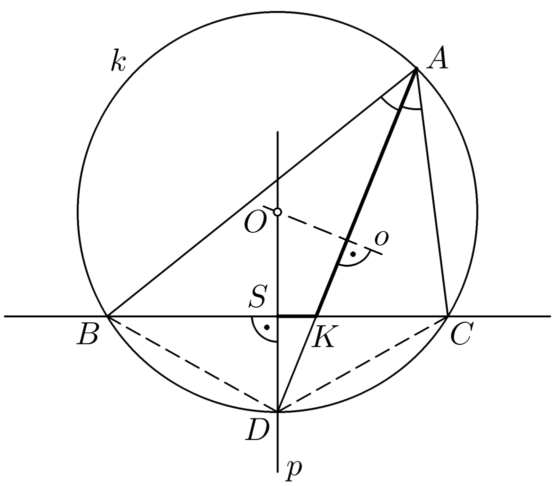
$$\begin{aligned}
x_4 &= 3 - 2 + 1 = 2,\\
x_5 &= 4 \cdot 2 - 3 - 2 + 1 = 4,\\
x_6 &= 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 6,\\
x_7 &= 6 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 3 - 2 + 1 = 10,\\
x_8 &= 7 \cdot 10 - 6 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12,\\
x_9 &= 8 \cdot 12 - 7 \cdot 10 - 6 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 12,\\
x_{10} &= 9 \cdot 12 - 8 \cdot 12 - 7 \cdot 10 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12,\\
x_{11} &= 10 \cdot 12 + 9 \cdot 12 - 8 \cdot 12 - 7 \cdot 10 - 6 \cdot 6 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 3 + 2 - 1 = 12.
\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že jedna z uvažovaných posloupností má pouze prvních sedm členů různých od čísla 12.

---

4. *V rovině je dán tupý úhel AKS. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho strana BC ležela na přímce KS, bod S byl jejím středem a bod K jejím průsečíkem s osou protilehlého úhlu BAC.* *(P. Leischner)*

Řešení. *Rozbor.* Předpokládejme, že trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti a označme D průsečík kružnice k opsané trojúhelníku ABC s polopřímkou opačnou k rameni KA daného úhlu AKS (obr. 2). Polopřímka AD půlí úhel BAC, proto jsou úhly BAD a CAD shodné, tudíž jsou shodné i tětivy BD a CD kružnice k. Bod S je proto středem základny BC rovnoramenného trojúhelníku BCD, takže úhel BSD je pravý. To znamená, že bod D leží na přímce p, která prochází bodem S kolmo k danému rameni KS. Střed O kružnice k leží jednak na přímce p (ose tětivy BC), jednak na přímce o, která je osou tětivy AD.



Obr. 2

Konstrukce. Pro daný úhel AKS nejprve proložíme bodem S přímku p kolmou k rameni KS. Pak sestrojíme průsečík D přímky p s polopřímkou opačnou k rameni KA.

Dále sestrojíme osu o úsečky AD a její průsečík s přímkou p označíme O. Konečně sestrojíme kružnici k se středem O a poloměrem $r = |OA|$ $(= |OD|)$ a její průsečíky s přímkou KS označíme B a C.

Důkaz konstrukce. Ukážeme, že sestrojený trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti. Z posledního kroku konstrukce plyne, že body B, C leží na přímce KS a že bod S je středem úsečky BC. Protože na přímce p, ose úsečky BC, leží i bod D, platí $|BD| = |CD|$, a proto $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD|$ (neboť všechny body A, B, C, D leží na kružnici k.) Polopřímka AD je tedy osou úhlu BAC a bod K je její průsečík s úsečkou BC.

Diskuse. Vysvětlíme, proč pro daný tupý úhel AKS je hledaný trojúhelník ABC jediný (nepřihlížíme-li k možnosti zaměnit označení vrcholů B a C). Protože je úhel AKS tupý, bod D z naší konstrukce zřejmě existuje a přímky p a o jsou různoběžné, takže i bod O je určen jednoznačně. Zbývá zdůvodnit, proč kružnice k protne přímku KS ve dvou bodech. Protože bod K je vnitřním bodem základny AD rovnoramenného trojúhelníku ADO, platí $|OK| < |OA| = |OD| = r$, tudíž bod K leží ve vnitřní oblasti kružnice k a přímka KS je nutně její sečnou.

---

5. *Ukažte, že v číselné soustavě s libovolným základem $z \geqq 3$ existují dvojmístná čísla A a B, která se liší jen pořadím svých číslic a mají tuto vlastnost: kvadratická rovnice $x^2 - Ax + B = 0$ má v oboru reálných čísel dvojnásobný kořen. Dokažte rovněž, že pro daný základ z je taková dvojice A, B jediná. Například v desítkové soustavě ($z = 10$) to jsou jedině čísla $A = 18$ a $B = 81$.* *(J. Šimša)*

Řešení. Hledaná dvoumístná čísla A, B mají tvar $A = az+b$ a $B = bz+a$, kde a, b jsou jejich (*nenulové*!) číslice, takže $a, b \in \{1, 2, \ldots, z-1\}$. Kvadratická rovnice z textu úlohy má dvojnásobný kořen x_0, právě když platí $2x_0 = A$ a $x_0^2 = B$. Z těchto rovností plyne, že číslo x_0 je kladné a celé. Vzhledem k nerovnosti $x_0^2 = B < z^2$ (B je totiž dvojmístné, zatímco z^2 je trojmístné) navíc platí $x_0 < z$, odkud $A = 2x_0 < 2z$, takže číslo A má jako první číslici jedničku. Platí tedy $a = 1$ a z rovností $2x_0 = z + b$ a $x_0^2 = bz + 1$ vyloučením x_0 dostaneme pro číslici b kvadratickou rovnici $(b-z)^2 = 4$ s dvěma kořeny $b_1 = z - 2$ a $b_2 = z + 2$. Za číslici b lze ovšem vzít pouze první z nich, takže nutně $b = z - 2$.

Dokázali jsme, že čísla A, B musejí být tvaru $A = z + (z-2) = 2z - 2$ a $B = (z-2)z + 1 = (z-1)^2$; v soustavě o základě z tedy mají zápisy $A = \overline{1(z-2)}$ a $B = \overline{(z-2)1}$. Provedeme ještě *zkoušku*: kvadratická rovnice $x^2-(2z-2)x+(z-1)^2 = 0$ má skutečně dvojnásobný kořen $x_0 = z - 1$, neboť její levá strana je rovna $(x - z + 1)^2$.

Poznámka. Klíčovou rovnost $a = 1$ lze odvodit i bez úvahy o dvojnásobném kořenu x_0 zkoumané rovnice, když zapíšeme podmínku, že její diskriminant $A^2 - 4B$ je roven nule:

$$0 = A^2 - 4B = (az + b)^2 - 4(bz + a) = b^2 + 2z(a-2)b + a(az^2 - 4).$$

Poslední výraz může mít nulovou hodnotu, jen když je činitel $a-2$ záporný, neboť $b \geqq 1$, $a \geqq 1$, $z \geqq 3$ a $az^2 - 4 \geqq 3^2 - 4 = 5$. Z nerovnosti $a - 2 < 0$ již ovšem plyne $a = 1$. Pro takové a dostáváme rovnici $0 = b^2 - 2zb + (z^2 - 4)$ a závěr je stejný jako v uvedeném řešení.

6. *Je-li součin kladných čísel a, b, c roven 1, pak platí*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq a+b+c.$$

Dokažte. *(P. Kaňovský)*

Řešení. K daným kladným číslům a, b, c splňujícím podmínku $abc = 1$ zapíšeme AG-nerovnost pro trojici čísel a/b, a/b a b/c:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right) \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = a.$$

Platí tedy odhad

$$\frac{2a}{3b}+\frac{b}{3c} \geqq a.$$

Ze stejného důvodu platí i odhady

$$\frac{2b}{3c}+\frac{c}{3a} \geqq b \quad \text{a} \quad \frac{2c}{3a}+\frac{a}{3b} \geqq c.$$

Sečtením těchto tří odhadů dostaneme dokazovanou nerovnost.

Jiné řešení. Platí-li pro kladná čísla a, b, c rovnost $abc = 1$, pak $\max\{a,b,c\} \geqq 1$ a $\min\{a,b,c\} \leqq 1$. Protože dokazovaná nerovnost se nezmění, zaměníme-li trojici (a,b,c) trojicí (b,c,a) nebo trojicí (c,a,b), budeme předpokládat, že čísla a a c jsou z trojice (a,b,c) nejmenší a největší (v některém pořadí), takže platí

$$(a-1)(1-c) \geqq 0. \tag{1}$$

Do dokazované nerovnosti dosadíme $c = a^{-1}b^{-1}$ a provedeme několik ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned} ab^{-1}+ab^2+a^{-2}b^{-1} &\geqq a+b+a^{-1}b^{-1}, \qquad / \cdot a^2b \\ a^3+a^3b^3+1 &\geqq a^3b+a^2b^2+a, \\ a^3b^3-a^2b^2-a^3b+a^3-a+1 &\geqq 0, \\ a^3(b^3-b^2-b+1)+(a^3-a^2)b^2-(a-1) &\geqq 0, \\ a^3(b-1)^2(b+1)+(a-1)(ab-1)(ab+1) &\geqq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí, neboť $(a-1)(ab-1) = (a-1)(ab-abc) = ab(a-1)(1-c)$ a takový součin je podle (1) nezáporný.

Jiné řešení. Pro libovolná kladná čísla A, B, C jsou trojice (A^2, B^2, C^2) a (A, B, C) takzvaně *souhlasně uspořádané*, tudíž platí nerovnost

$$A^2\cdot A+B^2\cdot B+C^2\cdot C \geqq A^2\cdot B+B^2\cdot C+C^2\cdot A. \tag{2}$$

Dokažme (2) bezprostředně: úpravou dostáváme nerovnost

$$(A-C)^2(A+C)+(B-C)(B^2-A^2) \geqq 0,$$

která zřejmě platí, pokud $B = \max\{A,B,C\}$, čehož lze vždy dosáhnout cyklickou permutací dané trojice čísel.

Zvolíme-li v dokázané nerovnosti (2) hodnoty $A = \sqrt[3]{a/b}$, $B = \sqrt[3]{b/c}$ a $C = \sqrt[3]{c/a}$, obdržíme nerovnost

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}},$$

ze které za předpokladu $abc = 1$ již plyne dokazovaná nerovnost.