44. mezinárodní matematická olympiáda

V pořadí již 44. ročník této prestižní mezinárodní soutěže uspořádala společnost *Mathematical Olympiad Foundation of Japan* za podpory japonského *Ministerstva školství, kultury, sportu, vědy a technologie*, *Japonské matematické společnosti* a *Japonské společnosti pro matematické vzdělávání* v hlavním městě Japonska Tokiu v době od 7. do 19. července 2003. Každou zemi reprezentuje vždy nejvýše šest soutěžících; letošního ročníku MMO se zúčastnilo 457 studentů z 82 zemí.

Výběr soutěžících za Českou republiku byl proveden v Kostelci nad Černými lesy na závěrečném soutěžním soustředění deseti nejúspěšnějších účastníků celostátního kola. Vybraní soutěžící se pak ještě zúčastnili trojutkání ve slovenské Žilině mezi Českou republikou, Slovenskem a Polskem, kde soutěžili reprezentanti zúčastněných zemí za podmínek podobných jako při soutěži na MMO. Po této přípravě odjela do Japonska tato šestice soutěžících: *Pavel Čížek* z Gymnázia v Kralupech nad Vltavou, *Vítězslav Kala*, *Marek Krčál* a *Jaromír Kuben* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Pavel Kocourek* z SPŠST v Panské ulici v Praze 1 a *Jan Moláček* z Gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové. Vedoucím české delegace byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze, zástupcem vedoucího byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Masarykovy Univerzity v Brně. Vedoucí delegace přicestoval do Tokia kvůli výběru úloh již 7. července, ostatní čeští účastníci pak o čtyři dny později.

Téměř vše se odehrávalo v moderním areálu budov *Národního olympijského střediska*, postaveném pro obdobná sportovní, kulturní a vzdělávací setkání v místě, kde se v roce 1964 konaly letní olympijské hry. Jen začátek soutěže od příletu soutěžících až do odpoledne druhého soutěžního dne strávila mezinárodní jury složená z vedoucích národních týmů v nedalekém Makuhari.

Den po příletu soutěžících se konalo slavnostní zahájení. Vlastní soutěž pak proběhla v neděli a v pondělí 13. a 14. července. Každý z těchto dnů řešili soutěžící trojici úloh po dobu 4,5 hodiny. Za každou úlohu mohli získat maximálně 7 bodů.

O náročnosti soutěžních úloh svědčí i nízké hranice pro zisk medailí: na bronzovou medaili stačilo 13 bodů, stříbro se udělovalo za 19–28 bodů a zlato za alespoň 29 z možného počtu 42 bodů. Výsledky našich jsou uvedeny v následující tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
269.–291.	Pavel Čížek, 8. roč. gymnázia, Kralupy nad Vltavou	7	1	0	0	1	0	9	HM
231.–246.	Vítězslav Kala, 3. roč. gymnázia, Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	0	0	3	1	0	11	HM
179.–196.	Pavel Kocourek, 2. roč. SPŠST, Panská ulice, Praha 1	0	7	0	7	0	0	14	III.
269.–291.	Marek Krčál, 4. roč. gymnázia, Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	0	0	2	0	0	9	HM
138.–162.	Jaromír Kuben, 1. roč. gymnázia, Brno, tř. Kpt. Jaroše	7	1	0	7	1	0	16	III.
93.–97.	Jan Moláček, 3. roč. GJKT, Hradec Králové	5	7	0	7	1	0	20	II.
	Celkem	33	16	0	26	4	0	79	

Jak je z tabulky vidět, zklamali oba naši maturanti, shodou okolností první dva vítězové letošního celostátního kola. Přitom nejlepší náš účastník, *Jan Moláček* z Gymnázia v Hradci Králové, skončil v celostátním kole až na 11. místě a do reprezentačního výběru se dostal jen díky neúčasti několika vítězů, kteří dali přednost přípravě na Mezinárodní fyzikální olympiádu. Stejně jako vloni získal 20 bodů, kdy to stačilo jen na bronzovou medaili, tentokrát však stejný bodový zisk znamenal stříbro. Podobně i Vítězslav Kala téměř zopakoval svůj loňský výsledek: získal o dva body méně, a zatímco vloni mu k bronzové medaili chyběl jen jeden bod, letos to byly body dva. V celkovém pořadí se však posunul o dvě příčky výše.

Každý z našich soutěžících vyřešil aspoň jednu z úloh za plný počet bodů a získal tak *Honorary mention*, ocenění, které je zvykem udělovat od 29. ročníku MMO. Žádný bod neztratili jen tři soutěžící: *Yunhao Fu* z Číny (ten dosáhl stejného úspěchu už na loňské 43. MMO ve skotském Glasgow) a dva soutěžící *Hung Viet Bao Le* a *Trong Canh Nguyen* z Vietnamu.

	I	II	III	body		I	II	III	body
Bulharsko	6	0	0	227	Norsko	0	1	0	62
ČLR	5	1	0	211	Arménie	0	0	3	61
USA	4	2	0	188	Bosna a Hercegovina	0	0	2	61
Vietnam	2	3	1	172	JAR	0	0	3	60
Rusko	3	2	1	167	Španělsko	0	0	1	59
Korea	2	4	0	157	Makedonie	0	0	2	54
Rumunsko	1	4	1	143	Švédsko	0	0	1	52
Turecko	1	3	1	133	Itálie	0	0	1	50
Japonsko	1	3	2	131	Kirgizie	0	0	2	50
Maďarsko	1	3	1	128	Lotyšsko	0	0	1	50
Velká Británie	1	2	3	128	Litva	0	0	2	49
Kanada	2	0	3	119	Uzbekistán	0	1	1	49
Kazachstán	1	2	2	119	Estonsko	0	0	0	47
Ukrajina	1	2	3	118	Finsko	0	0	1	43
Indie	0	4	1	115	Maroko	0	0	0	43
Tchaj-wan	1	2	2	114	Nový Zéland	0	0	0	43
Írán	0	3	2	112	Macao	0	0	2	40
Německo	1	2	1	112	Rakousko	0	0	0	38
Bělorusko	1	2	2	111	Peru (4)	0	0	1	37
Thajsko	1	1	3	111	Turkmenistán (4)	0	0	1	37
Izrael (5)	0	2	3	103	Island	0	0	1	33
Polsko	1	2	0	102	Trinidad a Tobago	0	0	0	33
Srbsko a Černá Hora	0	3	1	101	Nizozemsko	0	0	0	30
Francie	0	2	2	95	Uruguay (5)	0	0	0	29
Mongolsko	0	1	3	93	Dánsko (5)	0	0	0	27
Austrálie	0	2	2	92	Malajsie (5)	0	0	0	26
Brazílie	0	1	3	92	Švýcarsko	0	0	0	26
Argentina	1	1	2	91	Lucembursko (2)	0	0	1	25
Hongkong	0	2	2	91	Albánie (4)	0	0	0	23
Moldavsko	0	1	2	88	Kypr	0	0	0	23
Řecko	0	1	4	88	Portoriko (3)	0	0	1	23
Gruzie	0	1	2	86	Portugalsko	0	0	0	22
Chorvatsko	0	0	3	80	Irsko	0	0	0	21
Česká republika	0	1	2	79	Slovinsko	0	0	0	18
Slovensko	0	0	4	77	Kuba (1)	0	0	1	14
Singapur	0	0	2	71	Ekvádor	0	0	0	11
Belgie	0	1	1	70	Venezuela (3)	0	0	0	10
Indonézie	0	0	2	70	Filipíny	0	0	0	9
Kolumbie	0	0	3	67	Kuvajt (3)	0	0	0	8
Ázerbájdžán	0	1	1	66	Srí Lanka (4)	0	0	0	4
Mexiko	0	0	3	64	Paraguay (1)	0	0	0	0

Jak je patrno z tabulky zúčastněných států, na první místo v neoficiálním pořadí jednotlivých zemí podle celkového bodového zisku se tentokrát vyšvihlo Bulharsko, další místa obsadily tradičně výborná družstva Číny, Spojených států, Vietnamu a Ruska. (Případná čísla v závorce upozorňují na nižší počet účastníků.)

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Nechť A je podmnožina množiny $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$ obsahující právě 101 prvků. Dokažte, že v S existují čísla $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ taková, že množiny

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, 100$$

jsou navzájem disjunktní. (*Brazílie*)

2. Určete všechny dvojice kladných celých čísel (a, b) takových, že

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

je kladné celé číslo. (*Bulharsko*)

3. Je dán konvexní šestiúhelník, jehož libovolné dvě protější strany mají následující vlastnost: vzdálenost jejich středů je $\sqrt{3}/2$násobek součtu jejich délek. Dokažte, že všechny úhly daného šestiúhelníku jsou stejné.

(Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má tři dvojice protějších stran: AB a DE, BC a EF, CD a FA.) (*Polsko*)

4. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Označme postupně P, Q a R paty výšek z bodu D na přímky BC, CA a AB. Dokažte, že $|PQ| = |QR|$, právě když se osy úhlů ABC a ADC protínají na přímce AC. (*Finsko*)

5. Nechť n je přirozené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reálná čísla taková, že $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$.

(a) Dokažte, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leqq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(b) Ukažte, že rovnost platí, právě když $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je aritmetická posloupnost. (*Irsko*)

6. Nechť p je prvočíslo. Dokažte, že existuje prvočíslo q takové, že pro žádné celé n není číslo $n^p - p$ dělitelné q. (*Francie*)