ÚLOHY DOMÁCÍHO KOLA
53. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

Kategorie A

1. Určete všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že rovnice $x^2 + px + q = 0$ má řešení v oboru reálných čísel, přičemž platí: Je-li t kořenem této rovnice, je $|2t - 15|$ rovněž jejím kořenem.

P. Černek

2. V rovině daného čtverce $KLMN$ určete množinu všech bodů P, pro něž jsou úhly NPK, KPL a LPM shodné.

J. Švrček

3. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova“ délky n. Rozdělme je dvou skupin S_n a L_n podle toho, zda je v daném slově sudý, resp. lichý počet „slabik“ BA (za sudý považujeme i počet 0). Například slova $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patří obě do skupiny S_7, slova $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patří obě do skupiny L_7. Určete, pro která n mají skupiny S_n a L_n stejný počet prvků.

J. Šimša

4. Určete nejmenší reálné číslo p takové, že nerovnost

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \le \frac{1}{2}n(n+p)$$

platí pro každé přirozené číslo n.

S. Trávníček

5. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, jehož vnitřní úhel při vrcholu B má velikost $60°$.
a) Jestliže $|BC| = |CD|$, pak platí $|CD| + |DA| = |AB|$. Dokažte.
b) Rozhodněte, zda platí opačná implikace.

E. Kováč

6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad y^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}, \quad z^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

J. Šimša

Kategorie B

1. Každou z hvězdiček na místě jednotek čísel ve výrazu

$$\left|\frac{777\,777\,777\,77*}{777\,777\,777\,77*} - \frac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,559}\right|$$

nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz nabyl co nejmenší hodnoty.

J. Šimša

2. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk.

J. Zhouf

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x\lfloor x\rfloor - 5x + 7 = 0,$$

kde $\lfloor x\rfloor$ znamená dolní celou část čísla x, tedy největší celé číslo k, pro něž platí $k \le x$. (Například $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$ a $\lfloor -3{,}1\rfloor = -4$.)

E. Kováč

4. Číslo a_n vznikne tak, že za sebe napíšeme prvních n po sobě jdoucích přirozených čísel, například $a_{13} = 12\,345\,678\,910\,111\,213$. Určete, kolik čísel dělitelných 24 se nachází mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{10\,000}$.

P. Černek

5. Je dána přímka p a bod A, který na ní neleží. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s minimálním obsahem a ramenem BC na přímce p tak, aby byly splněny rovnosti $|BC| = |AC|$ a $|BE| = 3|DE|$, kde E je průsečík úhlopříček lichoběžníku.

P. Leischner

6. Určete všechna přirozená čísla M dělitelná 240, pro která má rovnice $M = \mathrm{NSN}(x, y)$ s neznámými x a y právě 1001 řešení v oboru přirozených čísel. (Symbol $\mathrm{NSN}(x, y)$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y.)

P. Černek

Kategorie C

1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n, které je větší než 3 a není dělitelné třemi, platí: Šachovnici $n \times n$ lze rozřezat na jeden čtverec 1×1 a obdélníky 3×1.

J. Zhouf

2. Je dán obdélník $ABCD$. Nechť přímky p a q, které procházejí vrcholem A, protínají polokružnice vně připsané stranám BC a CD daného obdélníku po řadě v bodech K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq D$) a rovněž strany BC a CD po řadě v bodech P a Q tak, že trojúhelník ABP má stejný obsah jako trojúhelník KCP a zároveň trojúhelník AQD má stejný obsah jako trojúhelník CLQ. Dokažte, že body K, L, C leží na téže přímce.

J. Švrček

3. Žák měl vypočítat příklad $X \cdot Y : Z$, kde X je dvojmístné číslo, Y trojmístné číslo a Z trojmístné číslo s číslicí 2 na místě jednotek. Výsledkem příkladu mělo být přirozené číslo. Žák však tečku přehlédl a součin $X \cdot Y$ chápal jako pětimístné číslo. Získal tak sedmkrát větší výsledek, než měl vyjít. Jaký příklad měl žák počítat?

P. Černek

4. Nechť P je libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových souměrnostech s osami AB, BC a CA. Určete množinu všech bodů P takových, že trojúhelník KLM je rovnoramenný.

J. Zhouf

5. Přirozené číslo nazveme *magickým*, právě když je lze rozložit na součet dvou trojmístných čísel zapsaných stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí. Například číslo 1413 je magické, neboť platí $1413 = 756 + 657$; nejmenší magické číslo je 202.
   a) Určete počet všech magických čísel.
   b) Ukažte, že součet všech magických čísel je roven 187 000.

J. Šimša

6. Ze všech čtyřúhelníků, jež lze vepsat do kružnice o daném poloměru r a které mají dvě strany dané délky m, určete ten, který má největší obsah.

P. Leischner