53. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácího kola kategorie A

1. *Určete všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že rovnice $x^2 + px + q = 0$ má řešení v oboru reálných čísel, přičemž platí: Je-li t kořenem této rovnice, je $|2t-15|$ rovněž jejím kořenem.*

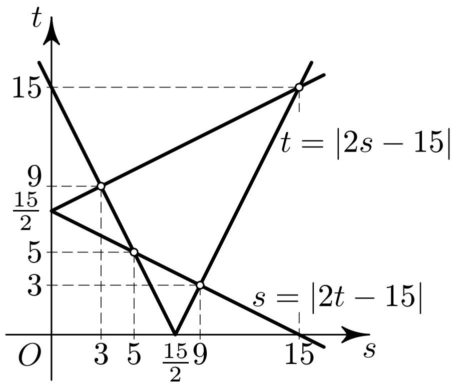
Řešení. Nechť t, s jsou reálné kořeny dané kvadratické rovnice. Uvažujme nejprve případ, kdy uvažovaná kvadratická rovnice má dvojnásobný (reálný) kořen. Platí tedy $t = s$ a přitom podle podmínek úlohy $t = |2t - 15|$. Pro $t \geqq 15/2$ dostáváme rovnici $t = 2t - 15$ s řešením $t = 15$ a pro $t < 15/2$ rovnici $t = -(2t - 15)$ s řešením $t = 5$. Jim odpovídající kvadratické rovnice mají tvar $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 = 0$ a $(x - 15)^2 = x^2 - 30x + 225 = 0$.

Uvažujme nyní případ, kdy uvažovaná kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny t, s. Rozlišíme tři případy.

- $t = |2t - 15|$ a současně $s = |2s - 15|$. Řešení obou rovnic (viz výše) tvoří dvojici $\{t, s\} = \{5, 15\}$. Odpovídající kvadratická rovnice má tvar $(x - 5)(x - 15) = x^2 - 20x + 75 = 0$.
- $t = |2s - 15|$ a současně $s = |2t - 15|$. Řešením čtyř soustav rovnic

$$t = \pm(2s - 15), \quad s = \pm(2t - 15)$$

(jež odpovídají různým volbám znamének) dostaneme dvojice (s, t) rovné $(15, 15)$, $(5, 5)$, $(3, 9)$ a $(9, 3)$, z nichž pouze poslední dvě vyhovují původní soustavě a podmínce $s \neq t$. Dodejme, že soustavu rovnic $t = |2s - 15|$ a $s = |2t - 15|$ lze rovněž řešit graficky v rovině Ost, do které zakreslíme obě lomené čáry $t = |2s - 15|$ a $s = |2t - 15|$ (obr. 1). Dvojicím $(3, 9)$ a $(9, 3)$ odpovídá kvadratická rovnice $(x - 3)(x - 9) = x^2 - 12x + 27 = 0$.



Obr. 1

- $t = |2t - 15| = |2s - 15|$. Jak už víme, rovnice $t = |2t - 15|$ má řešení $t = 5$ a $t = 15$. Pro $t = 5$ z rovnice $5 = |2s - 15|$ plyne $s = 5$ nebo $s = 10$, pro $t = 15$

z rovnice $15 = |2s - 15|$ plyne $s = 0$ nebo $s = 15$. S ohledem na podmínku $s \neq t$ tak dostáváme dvě řešení $(t, s) = (5, 10)$ a $(t, s) = (15, 0)$. Těmto řešením pak odpovídají po řadě dvě kvadratické rovnice $(x - 5)(x - 10) = x^2 - 15x + 50 = 0$ a $(x - 15)x = x^2 - 15x = 0$.

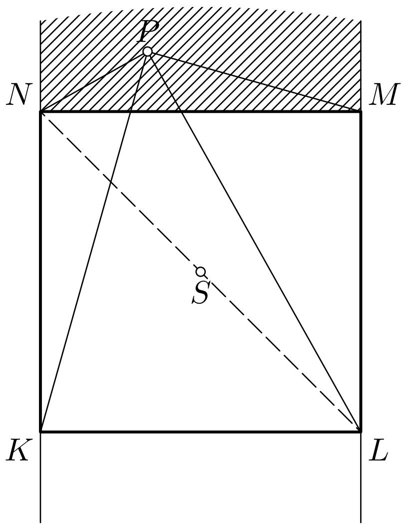
Závěr: Dané úloze vyhovuje šest dvojic (p, q) reálných čísel, a to dvojice $(-10, 25)$, $(-30, 225)$, $(-20, 75)$, $(-12, 27)$, $(-15, 50)$ a $(-15, 0)$.

Návodná úloha:
V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $y = |x - 3|$, $x = 3|y - 1|$. Výsledek algebraického postupu ověřte geometricky. [Soustava má tři řešení: $(x, y) = (3, 0)$, $(x, y) = (6, 3)$ a $(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.]

2. *V rovině daného čtverce $KLMN$ určete množinu všech bodů P, pro něž jsou úhly NPK, KPL a LPM shodné.*

Řešení. Označme P hledanou množinu bodů a S střed čtverce $KLMN$. Zřejmě $S \in \mathsf{P}$ (obr. 2).

Dále určíme všechny hledané body P ($P \neq S$), které leží uvnitř pásu omezeného rovnoběžkami KN a LM. Ukážeme, že každý takový bod P leží v polorovině opačné k polorovině MNK. Pro každý bod P uvažovaného pásu, který leží v polorovině opačné k polorovině KLM, platí totiž $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle KPN|$, neboť polopřímka PN leží v úhlu KPL. Podobně zjistíme, že žádný bod čtverce $KLMN$ (s výjimkou jeho středu S) nemá danou vlastnost.



Obr. 2

Leží-li tedy hledaný bod P ve vyšrafované oblasti na obr. 2, jsou přímky PK a PL podle zadání osami úhlů NPL a KPM. Proto v trojúhelníku LPN osa PK úhlu NPL protíná kružnici opsanou tomuto trojúhelníku (kromě bodu P) v bodě ležícím na ose strany NL. Tímto bodem je ovšem vrchol K čtverce $KLMN$. Body P, N, K, L tedy leží na téže kružnici, kterou je kružnice opsaná čtverci $KLMN$. (Analogický výsledek obdržíme, uvažujeme-li osu PL úhlu KPM.) Bod P proto leží na kratším oblouku

$l = \widehat{MN}$ kružnice opsané čtverci $KLMN$. Naopak pro každý bod $P \in l$ platí podle věty o obvodových úhlech (pro shodné tětivy NK, KL, LM)

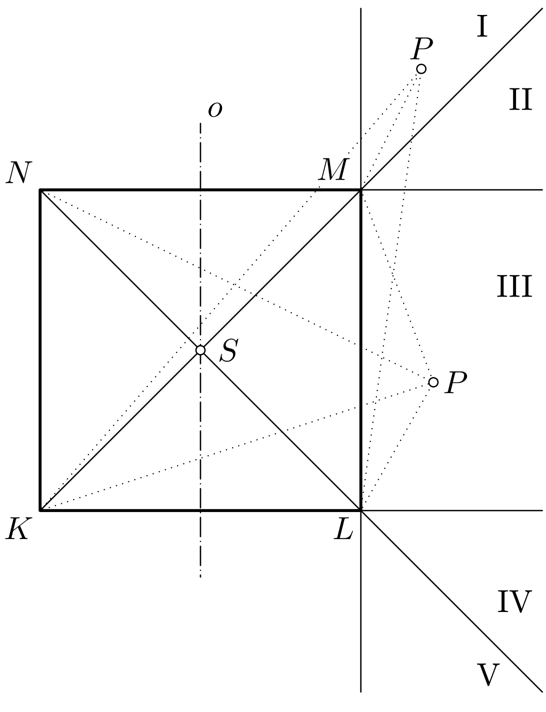
$$|\sphericalangle NPK| = |\sphericalangle KPL| = |\sphericalangle LPM| = 45^\circ.$$

Tím je hledání bodů P v pásu mezi rovnoběžkami KM a LM ukončeno.

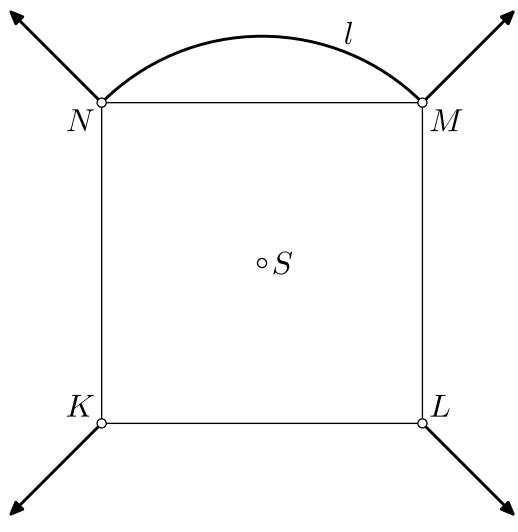
Dále snadno nahlédneme, že libovolný vnitřní bod P každé z polopřímek opačných k polopřímkám KM, LN, MK, NL má danou vlastnost. Ukážeme, že žádný další bod roviny čtverce $KLMN$ uvedenou vlastnost nemá. Stačí se přitom díky symetrii omezit na jednu z polorovin vyťatých osou o strany KL daného čtverce. Protože jsme již vyšetřili celý pás omezený rovnoběžkami KN a LM, lze (bez újmy na obecnosti) zkoumat jen body poloroviny opačné k polorovině LMN. Přímky KL, MN, LM, KM a LN dělí tuto polorovinu na pět částí (obr. 3), přitom žádný bod přímek KL, LM a MN danou vlastnost očividně nemá.

Ukážeme, že žádný vnitřní bod každé z oblastí I–V roviny čtverce $KLMN$ není prvkem množiny P. Jestliže P je vnitřním bodem oblasti I, evidentně platí $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle LPM|$ (obr. 3). Je-li P vnitřním bodem libovolné z oblastí II nebo III, platí naopak $|\sphericalangle KPL| < |\sphericalangle LPN|$. Pro libovolný vnitřní bod oblasti IV zase platí $|\sphericalangle NPK| > |\sphericalangle KPL|$ a pro libovolný vnitřní bod P oblasti V platí naopak $|\sphericalangle NPK| < |\sphericalangle KPL|$. Ve všech pěti uvažovaných případech jsme se však vždy dostali do rozporu s podmínkami úlohy.

Tím jsme prozkoumali všechny body roviny čtverce $KLMN$.



Obr. 3



Obr. 4

Závěr. Hledaná množina bodů P se skládá ze všech vnitřních bodů kratšího oblouku MN kružnice opsané danému čtverci $KLMN$, ze všech vnitřních bodů polopřímek opačných k polopřímkám KM, LN, MK a NL a ze středu S daného čtverce (obr. 4).

Návodná úloha:
V rovině daného pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou AB určete množinu všech bodů P, pro něž jsou úhly APC a BPC shodné. [Pro každé $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ nakreslete dvojice oblouků, z nichž jsou úsečky AC a BC vidět pod úhlem α, a zjistěte, jakou množinu vyplní jejich průsečíky. Zvláštní pozornost věnujte hodnotě $\alpha = 45^\circ$.]

Poznámka. Dvojím užitím výsledku návodné úlohy ($\triangle ABC = \triangle KML$ a $\triangle ABC = \triangle LNK$) obdržíte jiné řešení dané úlohy.

3. *Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A, B všechna možná „slova" délky n. Rozdělme je do dvou skupin S_n a L_n podle toho, zda je v daném slově sudý, resp. lichý počet „slabik" BA (za sudý považujeme i počet 0). Například slova $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patří obě do skupiny S_7, slova $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patří obě do skupiny L_7. Určete, pro která n mají skupiny S_n a L_n stejný počet prvků.*

Řešení. Skupinu S_n rozdělme na dvě části $(SA)_n$ a $(SB)_n$ podle toho, zda slovo skupiny S_n končí písmenem A, resp. B. Skupinu L_n rozdělme analogicky na dvě části $(LA)_n$ a $(LB)_n$ podle toho, zda slovo skupiny L_n končí písmenem A, resp. B. Označme dále s_n, l_n, $(sA)_n$, $(sB)_n$, $(lA)_n$, $(lB)_n$ po řadě počty prvků skupin S_n, L_n, $(SA)_n$, $(SB)_n$, $(LA)_n$, $(LB)_n$. Pro každé přirozené číslo n pak podle našeho rozdělení platí

$$\begin{aligned} s_n &= (sA)_n + (sB)_n, \\ l_n &= (lA)_n + (lB)_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Každé slovo ze skupiny $(SA)_{n+1}$ vznikne tak, že připíšeme písmeno A buď na konec slova ze skupiny $(SA)_n$, nebo na konec slova ze skupiny $(LB)_n$. Platí proto

$$(sA)_{n+1} = (sA)_n + (lB)_n.$$

Analogicky platí rovněž vztahy

$$\begin{aligned} (sB)_{n+1} &= (sA)_n + (sB)_n, \\ (lA)_{n+1} &= (sB)_n + (lA)_n, \\ (lB)_{n+1} &= (lA)_n + (lB)_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Pro $n = 1$ mají skupiny následující tvar

$$(SA)_1 = \{A\},\ (SB)_1 = \{B\},\ (LA)_1 = \emptyset,\ (LB)_1 = \emptyset,$$

a tedy $(sA)_1 = (sB)_1 = 1$ a $(lA)_1 = (lB)_1 = 0$.

Předpokládejme, že pro určité přirozené číslo k obsahují skupiny $(SA)_k$ a $(SB)_k$ stejný počet prvků, který označíme p, a zároveň skupiny $(LA)_k$ a $(LB)_k$ mají stejný počet prvků, který označíme q. Navíc předpokládejme, že platí $p \neq q$, jak je tomu v případě $k = 1$, kdy $p = 1$ a $q = 0$. Do následující tabulky zapišme počty prvků ve skupinách pro čísla $n = k, k+1, k+2, k+3, k+4$. Přitom pro výpočty hodnot užijme vztahy (1) a (2).

n	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$
$(sA)_n$	p	$p+q$	$p+3q$	$2p+6q$	$6p+10q$
$(sB)_n$	p	$2p$	$3p+q$	$4p+4q$	$6p+10q$
$(lA)_n$	q	$p+q$	$3p+q$	$6p+2q$	$10p+6q$
$(lB)_n$	q	$2q$	$p+3q$	$4p+4q$	$10p+6q$
s_n	$2p$	$3p+q$	$4p+4q$	$6p+10q$	$12p+20q$
l_n	$2q$	$p+3q$	$4p+4q$	$10p+6q$	$20p+12q$

Z tabulky lze vyčíst několik poznatků. Protože $p \neq q$, platí rovněž $2p \neq 2q$, $3p+q \neq p+3q$ a $6p+10q \neq 10p+6q$. Vidíme, že $s_k \neq l_k$, $s_{k+1} \neq l_{k+1}$, $s_{k+2} = l_{k+2}$, $s_{k+3} \neq l_{k+3}$ a že skupiny $(SA)_{k+4}$ a $(SB)_{k+4}$ obsahují opět stejný počet prvků a skupiny $(LA)_{k+4}$ a $(LB)_{k+4}$ opět stejný počet prvků, přitom tyto počty jsou navzájem různé.

Užitím matematické indukce usoudíme, že uvedená tabulka má všechny zmíněné vlastnosti pro každé $k = 4m+1$, kde m je celé nezáporné číslo, takže rovnost $s_n = l_n$ platí, právě když $n = k+2 = 4m+3$.

Závěr. Skupiny S_n a L_n mají stejný počet prvků, právě když $n = 4m+3$, kde m je celé nezáporné číslo.

Jiné řešení. Ze vztahů (1) a (2) plynou pro každé $n \geqq 2$ rovnosti

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= (sA)_{n+1} + (sB)_{n+1} = (sA)_n + (lB)_n + s_n = 2s_n + (lB)_n - (sB)_n = \\ &= 2s_n + l_{n-1} - s_{n-1} = 2s_n - 2s_{n-1} + \underbrace{l_{n-1} + s_{n-1}}. \end{aligned}$$

Svorkou označený součet je roven počtu všech slov délky $n-1$, tedy číslu 2^{n-1}. Znamená to, že posloupnost zkoumaných čísel $\{s_n\}$ splňuje rekurentní rovnici

$$s_{n+1} = 2s_n - 2s_{n-1} + 2^{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

jež (spolu s počátečními hodnotami $s_1 = 0$, $s_2 = 1$) umožňuje postupný výpočet všech hodnot s_n. Podle teorie rekurentních rovnic se dá najít řešení takové úlohy v explicitním tvaru

$$s_n = 2^{n-1} - \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \cos \frac{\pi(n-1)}{4},$$

z něhož plyne, že zkoumaná rovnost $s_n = 2^{n-1}$ nastane právě pro ta čísla n, jež jsou tvaru $4m+3$. Bez znalosti této teorie se obejdeme takto: vypočteme pomocí (3) několik prvních hodnot s_n a zapíšeme je do tabulky, kam pro porovnání uvedeme i příslušné hodnoty 2^{n-1} a rozdíl $s_n - 2^{n-1}$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
s_n	0	1	4	10	20	36	64	120	240	496	1 024	...
2^{n-1}	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	...
$s_n - 2^{n-1}$	−1	−1	0	2	4	4	0	−8	−16	−16	0	...

Tak přijdeme k hypotéze, že hledaná n jsou tvaru $4m+3$ a objevíme rovněž vlastnosti ostatních diferencí $s_n - 2^{n-1}$ (jsou to až na znaménka mocniny dvou). Pokusíme se proto najít závislost mezi čísly s_{n+4} a s_n. Podle (3) postupně určíme

$$\begin{aligned}
s_{n+2} &= 2s_{n+1} - 2s_n + 2^n,\\
s_{n+3} &= 2s_{n+2} - 2s_{n+1} + 2^{n+1} = 2(2s_{n+1} - 2s_n + 2^n) - 2s_{n+1} + 2^{n+1} =\\
&= 2s_{n+1} - 4s_n + 2^{n+2},\\
s_{n+4} &= 2s_{n+3} - 2s_{n+2} + 2^{n+2} =\\
&= 2(2s_{n+1} - 4s_n + 2^{n+2}) - 2(2s_{n+1} - 2s_n + 2^n) + 2^{n+2} =\\
&= -4s_n + 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^{n+2} = -4s_n + 2^{n+3} + 2^{n+1},
\end{aligned}$$

neboli

$$s_{n+4} - 2^{n+3} = -4(s_n - 2^{n-1})$$

Z posledního vztahu okamžitě plyne, že rovnost $s_{n+4} = 2^{n+3}$ platí, právě když $s_n = 2^{n-1}$. Protože z hodnot $n = 1, 2, 3, 4$ poslední rovnost platí pouze pro $n = 3$, je hypotéza o tom, že hledaná n jsou právě čísla tvaru $n = 4m+3$, dokázána.

Návodná úloha:

Kolik je všech slov délky osm, která jsou sestavena z písmen A, B, C a která nikde neobsahují ani „slabiku“ AB, ani „slabiku“ BA? (V jednom slově nemusí být všechna tři písmena A, B, C.) [1393. Označte a_n, b_n, c_n počet vyhovujících slov délky n, která končí písmenem a, resp. b, resp. c. Rovnosti $a_{n+1} = a_n + c_n$, $b_{n+1} = b_n + c_n$, $c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$ spolu s hodnotami $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ umožňují rekurentní výpočet, který ukončíme nalezením hodnot $a_8 = b_8 = 408$ a $c_8 = 577$.]

4. *Určete nejmenší reálné číslo p takové, že nerovnost*

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leqq \frac{1}{2}n(n+p)$$

platí pro každé přirozené číslo n.

Řešení. Pro $n = 1$ má daná nerovnost tvar

$$\sqrt{2} \leqq \frac{1}{2}(p+1), \quad \text{neboli} \quad p \geqq 2\sqrt{2} - 1.$$

Označme $p_1 = 2\sqrt{2} - 1$. Zjistili jsme, že žádné číslo p menší než p_1 požadovanou vlastnost nemá. Číslo p_1 je tedy hledané číslo, pokud ukážeme, že pro každé $n \geqq 1$ platí

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leqq \frac{1}{2}n(n+p_1). \tag{1}$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí.

(i) Pro $n = 1$ je nerovnost (1) splněna díky způsobu, jakým jsme číslo p_1 určili.

(ii) Předpokládejme, že nerovnost (1) platí pro určité přirozené číslo n a ukážeme, že platí i pro přirozené číslo $n+1$. Nechť tedy

$$F(n) = \sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \ldots + \sqrt{n^2+1} \leqq \frac{1}{2}n(n+p_1). \tag{2}$$

Protože

$$F(n+1) = F(n) + \sqrt{(n+1)^2+1},$$

platí podle indukčního předpokladu (2) a definice p_1

$$F(n+1) \leqq \frac{1}{2}n\bigl(n+2\sqrt{2}-1\bigr) + \sqrt{(n+1)^2+1}. \tag{3}$$

Nyní dokážeme nerovnost

$$\frac{1}{2}n\bigl(n+2\sqrt{2}-1\bigr) + \sqrt{(n+1)^2+1} \leqq \frac{1}{2}(n+1)\bigl(n+1+2\sqrt{2}-1\bigr). \tag{4}$$

Její úpravou dostaneme nerovnost s ní ekvivalentní

$$\sqrt{(n+1)^2+1} \leqq n+\sqrt{2},$$

o jejíž platnosti se snadno přesvědčíme po umocnění obou stran na druhou:

$$\bigl(n+\sqrt{2}\bigr)^2 = n^2+2\sqrt{2}n+2 > n^2+2n+2 = (n+1)^2+1.$$

Podle (3) a (4) platí

$$F(n+1) \leqq \frac{1}{2}(n+1)\bigl(n+1+2\sqrt{2}-1\bigr) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1+p_1),$$

což je nerovnost (1) pro hodnotu $n+1$.
Závěr. Hledaným reálným číslem je číslo $p = 2\sqrt{2}-1$.

Návodná úloha:
Určete nejmenší reálné číslo p takové, že nerovnost

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} \leqq p\cdot n$$

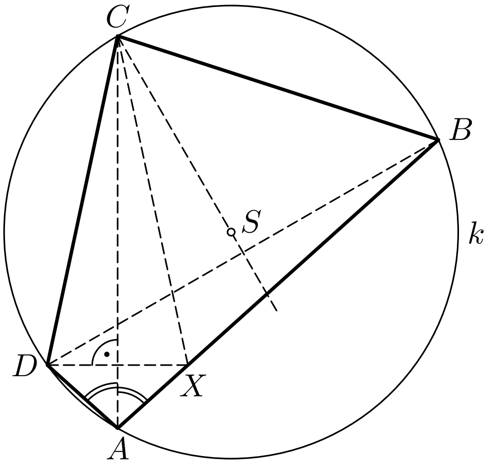
platí pro každé přirozené číslo n. [$p=1$. Pro $n=1$ dostaneme $p \geqq 1$; vlastnost čísla $p=1$ dokážeme matematickou indukcí, při které součet „nových“ zlomků $1/(2^n+k)$, $k \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$, odhadneme shora 2^n-násobkem největšího z nich.]

5. *Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, jehož vnitřní úhel při vrcholu B má velikost 60°.*

a) Jestliže $|BC| = |CD|$, pak platí $|CD| + |DA| = |AB|$. Dokažte.

b) Rozhodněte, zda platí opačná implikace.

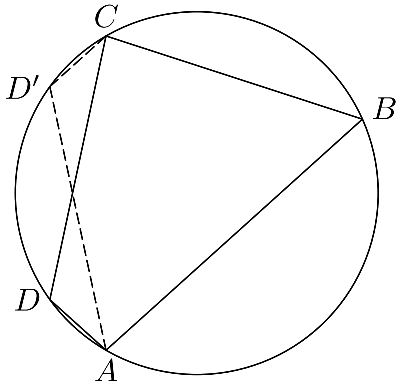
Řešení. Nejprve zvažme, jak může takový tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s šedesátistupňovým úhlem při vrcholu B a se shodnými stranami BC a CD vypadat. Označme k kružnici, jež je čtyřúhelníku $ABCD$ opsána. Protože $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, je už určena velikost úhlopříčky AC, která je tětivou odpovídající obvodovému úhlu 60°. Vrchol D pak musí být vnitřním bodem kratšího oblouku AC kružnice k (v polorovině opačné k ACB) a vrchol B je obrazem bodu D v souměrnosti podle přímky SC (obr. 5), kde S je střed kružnice k.



Obr. 5

Protože dle předpokladu $|BC| = |CD|$, jsou obvodové úhly BAC a CAD příslušné shodným tětivám shodné. Vidíme tedy, že polopřímky AD a AB jsou souměrně sdruženy dle osy AC. Označme X obraz bodu D v této souměrnosti (obr. 5). Bod X zřejmě leží uvnitř strany AB (obraz kratšího oblouku AC leží celý ve vnitřní oblasti kružnice k), a protože $|CX| = |CD| = |BC|$, je trojúhelník XBC rovnoramenný. Trojúhelník XBC je dokonce rovnostranný, protože velikost jeho úhlu při vrcholu B je $60°$. Je proto $|BX| = |BC| = |CD|$. Ze souměrnosti navíc plyne $|DA| = |XA|$, takže $|CD| + |DA| = |BX| + |XA| = |AB|$, což je požadovaná rovnost.

b) Snadno nahlédneme, že opačná implikace neplatí. Stačí vzít takový čtyřúhelník $ABCD$, který splňuje předpoklady úlohy, a zároveň v něm platí $|CD| \neq |DA|$ (takový určitě existuje, jak jsme naznačili hned v úvodu řešení). Prohodíme-li nyní strany CD a DA, tj. nahradíme-li vrchol D vrcholem D' souměrně sdruženým s vrcholem D podle osy úhlopříčky AC (obr. 6), dostaneme tětivový čtyřúhelník $ABCD'$ s šedesátistupňovým úhlem při vrcholu B, který bude i nadále splňovat rovnost $|CD'| + |D'A| = |DA| + |CD| = |AB|$, ale bude v něm platit $|BC| = |CD| = |D'A| \neq |D'C|$.



Obr. 6

Jiné řešení. Naučíme se *sinovou větu* v následujícím tvaru, který plyne z věty o obvodových úhlech: *Je-li R poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, je* $\sin\alpha = \frac{1}{2}a/R$, *kde* $a = |BC|$. (Doplníme-li cyklicky další dvě rovnosti, dostaneme odtud snadno běžné znění sinové věty ze školních učebnic.)

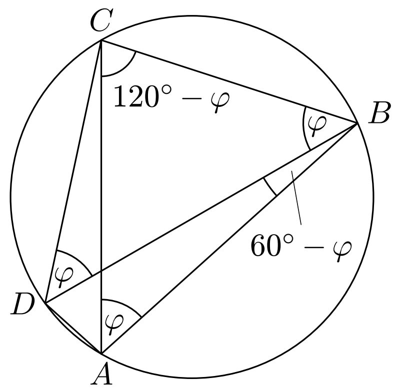
Označíme-li nyní φ obvodový úhel příslušný shodným tětivám BC a CD ($0^\circ < \varphi < 60^\circ$), snadno zjistíme, že tětivě DA přísluší obvodový úhel $60^\circ - \varphi$ a tětivě AB obvodový úhel $120^\circ - \varphi$ (obr. 7). Dokazovaná rovnost je pak dle sinové věty ekvivalentní rovnosti

$$\sin\varphi + \sin(60^\circ - \varphi) = \sin(120^\circ - \varphi).$$

Protože $\sin(120^\circ - \varphi) = \sin(60^\circ + \varphi)$, je uvedená rovnost (po jednoduché úpravě) ekvivalentní rovnosti

$$\sin\varphi = 2\cos 60^\circ \sin\varphi,$$

která triviálně platí.



Obr. 7

Stejně jako v předchozím řešení si uvědomíme, že rovnost $|CD| + |DA| = |AB|$ zůstane zachována, i když v daném čtyřúhelníku vyměníme obě strany CD a DA. Nový čtyřúhelník zůstane tětivový, velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu B se nezmění, ale místo rovnosti $|BC| = |CD|$ bude splněna rovnost $|BC| = |DA|$.

Jiné řešení. Označme délky stran čtyřúhelníku $ABCD$, který splňuje podmínky úlohy, obvyklým způsobem a, b, c, d. Protože vnitřní úhly při vrcholech B a D nají velikost 60°, resp. 120°, z kosinové věty pro trojúhelníky ABC a CDA plyne dvojím vyjádřením hodnoty $|AC|^2$ rovnost

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 + cd. \tag{6}$$

a) Jestliže $b = c$, lze z rovnosti (6) postupně odvodit:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - ac &= c^2 + d^2 + cd, \\ a^2 - d^2 &= ac + cd, \\ (a-d)(a+d) &= c(a+d), \\ a - d &= c. \end{aligned}$$

Rovnost $a = c + d$, kterou jsme měli dokázat, tedy platí.

b) Jestliže platí $a = c + d$, dostaneme po dosazení za a do rovnosti (6)

$$(c+d)^2 + b^2 - (c+d)b = c^2 + d^2 + cd.$$

Odtud po úpravě obdržíme vztah $(b-c)(b-d) = 0$, z něhož plyne, že platí $b = c$ nebo $b = d$. Opačná implikace tedy obecně neplatí.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Dokažte, že pro libovolný bod K kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC platí rovnost $|AK| + |BK| = |CK|$. [První řešení: Na úsečce CK zvolte bod X tak, aby $|KX| = |AK|$, a rovnost $|CX| = |BK|$ odvoďte ze shodnosti $\triangle AKB \cong \triangle AXC$. Druhé řešení: Zapište kosinové věty pro trojúhelníky ABK a ACK s úhly $120°$, resp. $60°$ u vrcholu K; získané rovnosti pak odečtěte a upravte.]
2. Pro obsah S libovolného čtyřúhelníku se stranami a, b, c, d platí jednak $\frac{1}{2}S \leqq ab + cd$, jednak $\frac{1}{2}S \leqq ac + bd$. Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. [První odhad plyne z rovnosti $\frac{1}{2}S = ab\sin\beta + cd\sin\delta$, druhý plyne snadno z prvního, uvědomíme-li si, že „prohozením" dvou sousedních stran se obsah čtyřúhelníku nezmění.]

6. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$x^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad y^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}, \quad z^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

ŘEŠENÍ. Jsou-li čísla x, y, z řešením dané soustavy, zřejmě platí $xyz \neq 0$. Vynásobme proto jednotlivé rovnice činiteli yz, zx resp. xy a v oboru nenulových reálných čísel řešme ekvivalentní soustavu rovnic

$$x^2yz = y + z, \quad xy^2z = x + z, \quad xyz^2 = x + y. \tag{1}$$

Součtem levých a pravých stran této soustavy rovnic získáme po úpravě rovnici

$$(xyz - 2)(x + y + z) = 0.$$

Odtud vidíme, že platí $xyz = 2$ nebo $x + y + z = 0$.

- Nechť $xyz = 2$. Po dosazení za součin xyz v soustavě (1) dostaneme

  $$2x = y + z, \quad 2y = x + z, \quad 2z = x + y,$$

  což je ekvivalentní se soustavou

  $$3x = x + y + z, \quad 3y = x + y + z, \quad 3z = x + y + z.$$

  Odtud plyne $x = y = z$. S ohledem na podmínku $xyz = 2$ dostaneme $x = y = z = \sqrt[3]{2}$. Zkouškou ověříme, že trojice $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$ je skutečně řešení soustavy (1), a tedy i původní soustavy rovnic.
- Nechť $x+y+z = 0$. Z první rovnice soustavy (1) plyne $x^2yz = -x$, odkud s ohledem na podmínku $x \neq 0$ dostaneme $xyz = -1$. Ověřme, že každá trojice nenulových reálných čísel (x, y, z) splňující soustavu dvou rovnic

  $$x + y + z = 0, \quad xyz = -1 \tag{2}$$

je řešením původní soustavy. Z rovností (2) totiž plyne

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{y+z}{yz}=\frac{-x}{-1/x}=x^2$$

(s ohledem na symetrii zadané soustavy stačilo ověřit jednu rovnici).

Soustava rovnic (2) má v oboru nenulových reálných čísel nekonečně mnoho řešení, která získáme například tak, že jednu proměnnou (např. z) zvolíme jako parametr. Tím dostaneme soustavu

$$x+y=-z,\quad xy=-\frac{1}{z}.$$

Po dosazení za x z první rovnice do druhé dostaneme

$$(y+z)y=\frac{1}{z},$$

tedy

$$y^2+yz-\frac{1}{z}=0. \tag{3}$$

Jedná se o kvadratickou rovnici s neznámou y a parametrem z. Její diskriminant je roven $D=z^2+4/z$. Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby tato rovnice měla reálné kořeny, je nerovnost $D \geqq 0$. Vyřešením nerovnice $(z^3+4)/z \geqq 0$ dostaneme pro parametr z podmínku

$$z\in\left(-\infty,-\sqrt[3]{4}\right\rangle\cup(0,\infty). \tag{4}$$

Za podmínky (4) má kvadratická rovnice (3) kořeny

$$y_1=\frac{-z+\sqrt{z^2+4/z}}{2}\quad\text{a}\quad y_2=\frac{-z-\sqrt{z^2+4/z}}{2},$$

kterým podle vztahu $x=-y-z$ odpovídají hodnoty

$$x_1=\frac{-z-\sqrt{z^2+4/z}}{2}\quad\text{a}\quad x_2=\frac{-z+\sqrt{z^2+4/z}}{2},$$

přitom pouze v případě $z=-\sqrt[3]{4}$ platí $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

Závěr. Daná soustava má řešení $x=y=z=\sqrt[3]{2}$. Všechna ostatní řešení jsou trojice (x,y,z) tvaru

$$(x,y,z)=\left(\frac{-z\pm\sqrt{z^2+4/z}}{2},\frac{-z\mp\sqrt{z^2+4/z}}{2},z\right),$$

kde z je libovolné číslo splňující podmínku (4).

Návodná úloha:

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x=\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\quad y=\frac{1}{z}+\frac{1}{x},\quad z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

[$x=y=z=\sqrt{2}$. Rovnosti $x=y=z$ plynou z toho, že všechny tři součty $x+y$, $x+z$, $y+z$ se navzájem rovnají; jejich hodnota je totiž xyz.]