53. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Každou z hvězdiček na místě jednotek čísel ve výrazu*

$$\left|\frac{777\,777\,777\,77*}{777\,777\,777\,77*}-\frac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,559}\right|$$

nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz nabyl co nejmenší hodnoty.

Řešení. Označme x a y číslice, které doplníme do čitatele, resp. jmenovatele prvního zlomku. Protože celý výraz v absolutní hodnotě budeme algebraicky upravovat, kvůli přehlednějším zápisům zavedeme označení $N = 111\,111\,111\,110$. Jednotlivá čísla z daného výrazu pak mají vyjádření:

$$\begin{aligned}
777\,777\,777\,77x &= 7N + x,\\
777\,777\,777\,77y &= 7N + y,\\
555\,555\,555\,554 &= 5N + 4,\\
555\,555\,555\,559 &= 5N + 9.
\end{aligned}$$

Zkoumaný výraz pak lze zapsat a upravit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{7N+x}{7N+y}-\frac{5N+4}{5N+9}\right| = \frac{|(7N+x)(5N+9)-(5N+4)(7N+y)|}{(7N+y)(5N+9)} =\\
&= \frac{|(35N^2+5xN+63N+9x)-(35N^2+5yN+28N+4y)|}{(7N+y)(5N+9)} =\\
&= \frac{|5\cdot(7-y+x)\cdot N+9x-4y|}{(7N+y)(5N+9)}.
\end{aligned}$$

Označme ještě čitatele a jmenovatele získaného zlomku:

$$C = |5\cdot(7-y+x)\cdot N+9x-4y| \qquad \text{a} \qquad J = (7N+y)(5N+9).$$

Budeme-li za x, y dosazovat různé dvojice číslic, jmenovatel J bude nabývat pouze deseti různých hodnot v rozmezí

$$(7N+0)(5N+9) \leqq J \leqq (7N+9)(5N+9).$$

Podívejme se nyní, jak velkých či malých hodnot bude nabývat čitatel C. Protože číslo $9x-4y$ je nejvýše dvojmístné, zatímco číslo N dvanáctimístné, řád čitatele C bude záviset na tom, zda bude činitel $(7-y+x)$ roven nule či nikoli. Proto tyto dvě možnosti posoudíme odděleně.

A. Případ $7-y+x=0$. Tehdy platí $y=x+7$ a zkoumaný čitatel C je tvaru

$$C=|5\cdot 0\cdot N+(9x-4y)|=|9x-4(x+7)|=|5x-28|.$$

Jelikož číslice y (rovná $x+7$) je nejvýše 9, je číslice x rovna 0, nebo 1, nebo 2, takže výraz $|5x-28|$ se rovná 28, nebo 23, nebo 18. *Nejmenší* hodnota čitatele C je tudíž rovna 18 a dosáhneme ji jedině pro $x=2$ a $y=9$. Šťastnou „shodou okolností“ má zrovna pro $y=9$ jmenovatel J *největší* hodnotu, takže

$$\min\left\{\frac{C}{J}\right\}=\frac{18}{(7N+9)(5N+9)}.$$

B. Případ $7-y+x\neq 0$. Ukažme, že hodnoty čitatele C (tudíž i hodnoty zlomku C/J) jsou v tomto případě „obrovské“ ve srovnání s případem A. Z nerovnosti $7-y+x\neq 0$ plyne odhad $|7-y+x|\geqq 1$ (číslo $7-y+x$ je celé), tudíž máme

$$C=|5\cdot(7-y+x)\cdot N+9x-4y|\geqq 5\cdot|7-y+x|\cdot N-|9x-4y|\geqq 5N-|9x-4y|.$$

Protože x a y jsou číslice, platí zřejmě $|9x-4y|\leqq 81$. Z posledního odhadu C a maximální hodnoty J proto plyne nerovnost

$$\frac{C}{J}\geqq\frac{5N-81}{(7N+9)(5N+9)}.$$

Poslední zlomek je „mnohokrát“ větší než zlomek v závěru případu A, neboť oba zlomky mají stejný jmenovatel, zatímco srovnání čitatelů zřejmě dopadá takto: $5N-81\gg 18$ (nerovnost $5N-81>18$ platí již od hodnoty $N=20$).

Závěr: Do čitatele doplníme číslici $x=2$, do jmenovatele číslici $y=9$.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Najděte nejmenší hodnotu každého z výrazů

$$|20-3k|,\ k^2-11k,\ |5k-2|+|2k-5|,$$

probíhá-li proměnná k množinu všech celých čísel. [1, −30, 6]

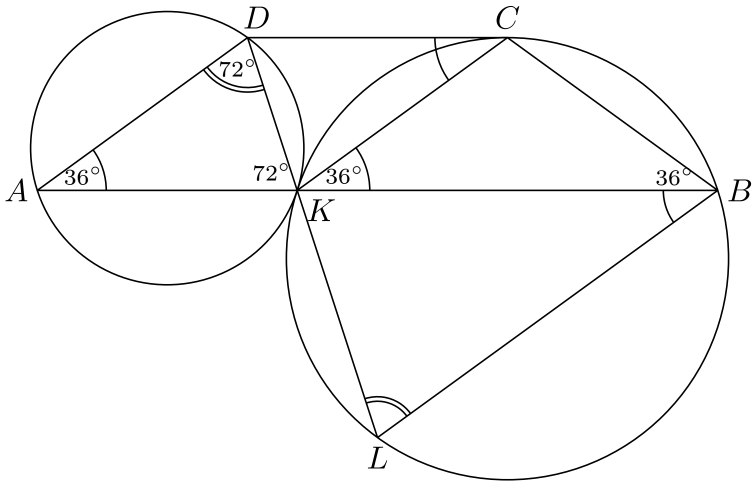
2. Určete, pro která reálná x nabývá minimální hodnoty výraz

$$(x+99)^2\cdot 9^{9^{9^{9^9}}}+(x+999)^2\cdot 9^{9^{9^9}}+(x+9\,999)^2\cdot 9^{9^9}.$$

[$x=-99$]

2. *V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk.*

Řešení. V rovnoramenném trojúhelníku AKD známe úhel DAK proti základně KD. Můžeme dopočítat zbylé dva úhly při základně (obr. 1): $|\sphericalangle ADK| = |\sphericalangle AKD| = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle DAK|) = 72°$. Čtyřúhelník $AKCD$ má protější strany AK a CD shodné a rovnoběžné, takže se jedná o rovnoběžník, tudíž přímky KC a AD jsou rovnoběžné. Úhly DAK a CKB jsou tedy souhlasné a úhly CKB a KCD střídavé, proto $|\sphericalangle CKB| = |\sphericalangle KCD| = 36°$. Úhel DKC doplňuje úhly AKD a CKB do přímého úhlu, jeho velikost je tedy $|\sphericalangle DKC| = 180° - 36° - 72° = 72°$.

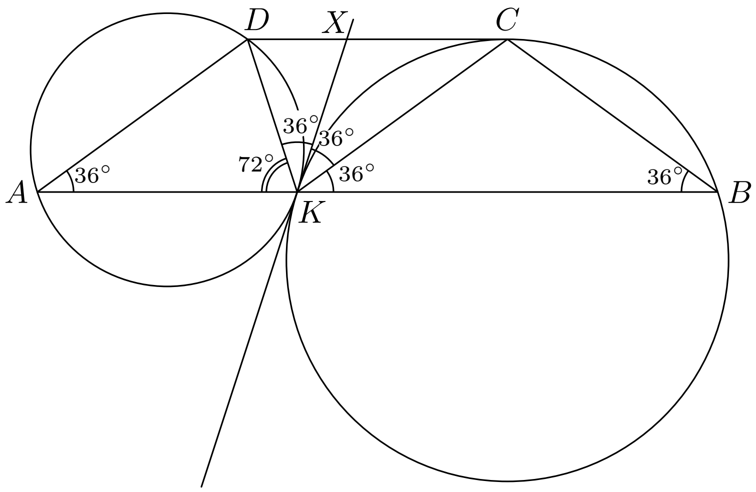


Obr. 1

Na polopřímce opačné k polopřímce KD zvolme bod L tak, že $|KL| = |AD|$. Potom $|\sphericalangle LKB| = |\sphericalangle AKD| = 72°$ a $|\sphericalangle CKL| = |\sphericalangle LKB| + |\sphericalangle CKB| = 108°$. Dopočítaním úhlů v lichoběžníku $ABCD$ dostáváme $|\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}(360° - 2 \cdot 36°) = 144°$ a můžeme vyjádřit velikost úhlu BCK: $|\sphericalangle BCK| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle KCD| = 144° - 36° = 108°$. Nyní již víme, že $|KL| = |CB|$ a $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle KCB|$, což znamená, že $LBCK$ je rovnoramenný lichoběžník, a lze mu tedy opsat kružnici (shodnou s kružnicí opsanou trojúhelníku KBC). Dále můžeme z lichoběžníku $LBCK$ dopočítat $|\sphericalangle KLB| = \frac{1}{2}(360° - 2 \cdot 108°) = 72° = |\sphericalangle KDA|$. Z této rovnosti plyne, že $AD \parallel BL$, takže trojúhelníky ADK a BLK jsou vzájemně stejnolehlé podle středu K. Stejnolehlé jsou potom i kružnice jim opsané. Protože obě procházejí středem K zmíněné stejnolehlosti, mají v tomto bodě vnější dotyk.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení zjistíme, že $|AKD| = 72°$. Čtyřúhelník $AKCD$ je rovnoběžník (obr. 2), takže $|CK| = |AD|$. Z rovnosti $|CK| = |BC|$ v trojúhelníku KBC usoudíme, že $|\sphericalangle CKB| = |\sphericalangle KBC| = 36°$. Proto na základně CD existuje bod X tak, že $|AKX| = 108°$ (a $|\sphericalangle BKX| = 72°$). Pak $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle AKX| - |\sphericalangle AKD| = 108° - 72° = 36°$, a tedy $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle DAK|$, takže úhel DKX je úsekovým úhlem příslušným oblouku DAK v kružnici opsané trojúhelníku AKD, to znamená, že přímka KX je její tečnou. Podobně $|\sphericalangle CKX| = |\sphericalangle BKX| -$

$-\ |\sphericalangle BKC| = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ = |\sphericalangle KBC|$, takže KX je i tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku KBC. Kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají tedy společnou tečnu KX procházející společným bodem K. Obě kružnice se tudíž v tomto bodě dotýkají.



Obr. 2

Návodné úlohy:

1. Procvičte definice a vlastnosti obvodových, středových a úsekových úhlů.
2. Dvě kružnice k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2 se dotýkají v bodě A. Bodem A vedeme přímku, která protíná kružnici k_1 v bodě A_1 a kružnici k_2 v bodě A_2. Dokažte, že přímky S_1A_1 a S_2A_2 jsou rovnoběžné.
3. Tři kružnice k_1, k_2 a k_3 se navzájem dotýkají vně. Dokažte, že přímky spojující bod dotyku kružnic k_1 a k_2 se dvěma zbývajícími body dotyku protínají dále kružnici k_3 v bodech ležících na průměru této kružnice. [Využijte předchozí úlohu.]

3. *V oboru reálných čísel řešte rovnici*

$$x\lfloor x\rfloor - 5x + 7 = 0,$$

kde $\lfloor x\rfloor$ *znamená dolní celou část čísla* x, *tedy největší celé číslo* k, *pro něž platí* $k \leqq x$. *(Například* $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$ *a* $\lfloor -3{,}1\rfloor = -4$.*)*

Řešení. Označme $k = \lfloor x\rfloor$, tedy $x = k + \alpha$, $0 \leqq \alpha < 1$. Daná rovnice má potom tvar $(k+\alpha)k - 5(k+\alpha) + 7 = 0$. Odtud $\alpha = \dfrac{k^2 - 5k + 7}{5 - k}$. Hledáme tedy celá čísla k, pro která platí

$$0 \leqq \frac{k^2 - 5k + 7}{5 - k} < 1. \qquad (*)$$

Každou z těchto nerovností vyšetříme odděleně. Protože kvadratický trojčlen $k^2 - 5k + 7$ má záporný diskriminant, platí $k^2 - 5k + 7 \geqq 0$ pro každé $k \in \mathbb{R}$, takže levá nerovnost v $(*)$ platí, právě když $5-k>0$, neboli $k<5$. Vyřešme pravou nerovnici:

$$\begin{aligned}\frac{k^2-5k+7}{5-k}&<1,\\ \frac{k^2-5k+7-(5-k)}{5-k}&<0,\\ \frac{k^2-4k+2}{5-k}&<0,\\ \frac{(k-2-\sqrt{2})(k-2+\sqrt{2})}{5-k}&<0.\end{aligned}$$

Podle polohy čísel $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$ a 5 na číselné ose zjistíme, že poslední nerovnost platí, právě když $k\in\left(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)\cup(5,\infty)$. Nerovnosti $(*)$ tedy platí současně, právě když $k\in\left(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$. Této podmínce vyhovují pouze tři celá čísla $k\in\{1,2,3\}$. Pro $k=1$ dopočteme $\alpha=\frac{3}{4}$, pro $k=2$ vyjde $\alpha=\frac{1}{3}$ a pro $k=3$ je $\alpha=\frac{1}{2}$. Celkem dostáváme tři řešení $x_1=\frac{7}{4}$, $x_2=\frac{7}{3}$, $x_3=\frac{7}{2}$.

Jiné řešení. Jako v prvním řešení označíme $k=\lfloor x\rfloor$ a z rovnice $kx-5x+7=0$ vyjádříme x ve tvaru $x=\dfrac{7}{5-k}$. Nyní hledáme celá čísla k, pro která platí $k\leqq\dfrac{7}{5-k}<$ $<k+1$. Obě nerovnice jsou splněny jedině pro celá $k\in\{1,2,3\}$, kterým odpovídají kořeny $x\in\{\frac{7}{4},\frac{7}{3},\frac{7}{2}\}$.

Návodná úloha:
V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\lfloor x\rfloor^2-x^2=\frac{1}{2}.$$

[Nekonečně mnoho řešení tvaru $x=-\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}$, $k=1,2,\ldots$]

4. *Číslo a_n vznikne tak, že za sebe napíšeme prvních n po sobě jdoucích přirozených čísel, například $a_{13}=12\,345\,678\,910\,111\,213$. Určete, kolik čísel dělitelných 24 se nachází mezi čísly $a_1,a_2,\ldots,a_{10\,000}$.*

Řešení. Přirozené číslo je dělitelné číslem 24, právě když je dělitelné současně (navzájem nesoudělnými) čísly 3 a 8. Pro ciferný součet přirozeného čísla k zaveďme označení $S(k)$. Číslo a_n je dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelný jeho ciferný součet, tedy číslo $S(1)+S(2)+\ldots+S(n)$. Zbytek po dělení třemi tohoto součtu závisí pouze na zbytcích (po dělení třemi) jednotlivých sčítanců $S(k)$. Protože při dělení třemi dává číslo $S(k)$ stejný zbytek jako číslo k (viz návodnou úlohu 1), dávají čísla $S(1),S(4),S(7),\ldots$ zbytek 1, čísla $S(2),S(5),S(8),\ldots$ zbytek 2 a čísla $S(3),S(6),S(9),\ldots$ zbytek 0. Proto například číslo $S(a_{14})$, tedy součet $S(1)+S(2)+\ldots+S(14)$, dává při dělení třemi stejný zbytek jako součet

$$(1+2+0)+(1+2+0)+(1+2+0)+(1+2+0)+1+2.$$

Podle uzávorkovaných trojic snadno vidíme, že tento součet je dělitelný třemi. Protože obecně součet $S(3k-2)+S(3k-1)+S(3k)$ je dělitelný třemi pro každé přirozené k, můžeme obdobným způsobem uzávorkovat každý součet

$$S(1)+S(2)+\ldots+S(n)$$

a zjistit, že jeho zbytek při dělení třemi

- je roven 1, je-li $n=3k-2$;
- je roven 0, je-li $n=3k-1$ nebo $n=3k$.

Čísla a_n tedy budou dělitelná třemi, právě když n bude tvaru $3k$ nebo $3k-1$ $(k=1,2,\ldots)$.

Nyní rozeberme, kdy budou čísla a_n navíc dělitelná osmi. Přirozené číslo je dělitelné osmi, právě když je dělitelné osmi poslední trojčíslí jeho zápisu v desítkové soustavě. Naše úvahy budou to záviset na počtu číslic čísla n:

- Alespoň trojmístná n. Pro taková n je tedy a_n dělitelné osmi, právě když je dělitelné osmi číslo n.
  Protože se zbytky čísel a_n po dělení třemi opakují po třech, zbytky po dělení osmi po osmi číslech a_n, budou se zbytky po dělení číslem 24 opakovat po nejmenším společném násobku těchto period, tedy po dvaceti čtyřech. Pro trojmístná n snadno zjistíme, že podmínce v úloze vyhovují čísla tvaru $104+24k$ a $120+24k$ (n musí být dělitelné osmi a dávat zbytek dva nebo nula po dělení třemi). Do 10 000 máme 413 čísel tvaru $104+24k$ $(413=\lfloor\frac{1}{24}(10\,000-104)\rfloor+1)$ a 412 čísel tvaru $120+24k$.
- Dvojmístná n. Aby bylo číslo a_n dělitelné osmi, musí být dělitelné čtyřmi. O dělitelnosti čtyřmi rozhoduje poslední dvojčíslí, takže čtyřmi budou dělitelná právě všechna ta a_n, pro která je n dělitelné čtyřmi. Číslo $n-1$ je pak liché, tedy i a_{n-1} je číslo liché a číslo $100a_{n-1}$ dává zbytek čtyři po dělení osmi. Potom číslo $a_n=100a_{n-1}+n$ bude dělitelné osmi, právě když n bude také dávat zbytek čtyři po dělení osmi, bude tedy tvaru $8k+4$. Spolu s podmínkou na dělitelnost třemi dostáváme, že vyhovující dvojmístná čísla n mají (stejně jako výše) periodu 24 a jsou tvaru $n=12+24k$ a $n=20+24k$, $k\in\{0,1,2,3\}$. Do sta to máme $4+4=8$ čísel.
- Jednomístná n. Snadno zjistíme, že ze všech sudých čísel a_n pro $n\leqq 8$ vyhovuje pouze $a_6=123\,456$.

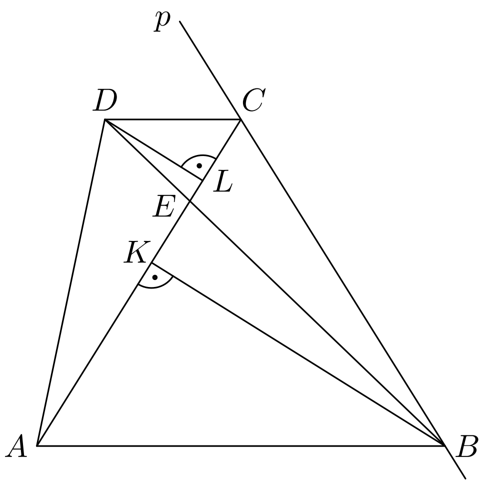
  Celkem vyhovuje 834 čísel.

Návodné úlohy:

1. Ze školy dobře znáte pravidlo: číslo k je dělitelé třemi, právě když je třemi dělitelný jeho ciferný součet $S(k)$. Dokažte obecnější poznatek: Rozdíl $k-S(k)$ je dělitelný třemi pro každé k. (Stejné zobecnění platí i pro dělitelnost devíti.)
2. Definujme posloupnost přirozených čísel a_n pomocí vztahů $a_1=1$, $a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ pro $n>2$ (Fibonacciho posloupnost). Dokažte, že pro každé přirozené číslo k existuje přirozené číslo l takové, že každé z čísel $a_{l+1}-a_1$, $a_{l+2}-a_2$, $a_{l+3}-a_3$, ... je násobkem čísla k. Dokažte také, že potom číslo k dělí člen a_l.

5. *Je dána přímka p a mimo ni bod A. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s minimálním obsahem a ramenem BC na přímce p tak, aby $|BC|=|AC|$ a průsečík E jeho úhlopříček splňoval vztah $|BE|=3|DE|$.*

Řešení. Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný lichoběžník a K, L jsou paty kolmic z vrcholů B, D na přímku AC (obr. 3). Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků BKE

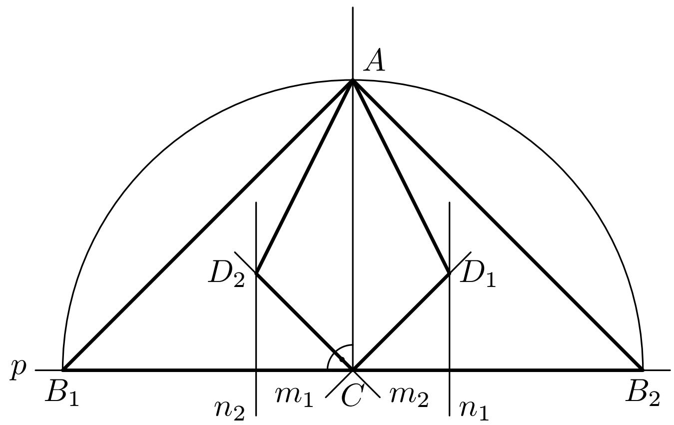


Obr. 3

a DLE plyne, že délky stran BK a DL, tedy odvěsen ve zmíněných trojúhelnících, jsou ve stejném poměru jako délky jejich přepon BE a DE, tedy $3:1$. BK a DL jsou však i výšky v trojúhelnících ABC a ACD, a to na společnou stranu AC. Obsahy těchto trojúhelníků jsou tedy také v poměru $3:1$, takže obsah lichoběžníku $ABCD$ je roven $\frac{4}{3}P$, kde P je obsah rovnoramenného trojúhelníku ABC. Výška tohoto trojúhelníku z bodu A na stranu BC je dána (vzdálenost bodu A od přímky p). Obsah trojúhelníku ABC bude tedy minimální, bude-li minimální délka strany BC, tedy i AC, tedy když úsečka AC bude kolmá na p.

Konstrukce. Nejprve sestrojíme bod C (pata kolmice z A na p). Vrchol B nalezneme jako průsečík přímky p s kružnicí $k(C, |AC|)$ (dvě možnosti). Vrchol D je průsečíkem přímky m, vedené bodem C rovnoběžně s AB, a přímky n rovnoběžné s AC ve vzdálenosti $\frac{4}{3}|BC|$ od vrcholu B uvnitř poloroviny opačné k ACB.

Úloha má celkem dvě řešení souměrně sdružená podle přímky $AC \perp p$ (obr. 4).



Obr. 4

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Z pravoúhlých trojúhelníků s danou délkou přepony určete ten s největším obsahem. [Rovnoramenný pravoúhlý.]
2. Dokažte, že z trojúhelníků ABC s daným úhlem při vrcholu A a pevným obsahem má nejmenší délku strany BC rovnoramenný trojúhelník se základnou BC. [Použijte kosinovou větu.]

6. *Určete všechna přirozená čísla M dělitelná 240, pro která má rovnice $M = \mathrm{NSN}(x, y)$ s neznámými x a y právě 1 001 řešení v oboru přirozených čísel. (Symbol $\mathrm{NSN}(x, y)$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y.)*

ŘEŠENÍ. Nejprve ukažme, že pro číslo M s prvočíselným rozkladem $M = \prod_{i=1}^{n} p_i^{c_i}$ (p_i jsou různá prvočísla) je počet řešení rovnice $\mathrm{NSN}(x, y) = M$ roven $\prod_{i=1}^{n} (2c_i + 1)$. Vskutku, každé řešení (x, y) dané rovnice má tu vlastnost, že libovolné prvočíslo p_i ($i = 1, \dots, n$) dělí alespoň jedno z čísel x a y (a to nejvýše v takové mocnině, v jaké dělí M) a žádná jiná prvočísla už ani x, ani y nedělí; x a y jsou tedy tvaru $x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}$, $y = \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}$, $a_i, b_i \in \mathbb{N}_0$, a navíc $\max(a_i, b_i) = c_i$, $i = 1, \dots, n$. Čísla x a y tak jednoznačně určují n-tice čísel a_i a b_i a obráceně jsou jimi jednoznačně určena. Všechna řešení dané rovnice jsou tedy popsána dvojicemi n-tic přirozených čísel takových, že na i-té pozici je v obou n-ticích číslo z množiny $\{0, \dots, c_i\}$ a alespoň v jedné z nich se přímo rovná c_i. Takových n-tic je $\prod_{i=1}^{n} (2c_i+1)$: Dvě n-tice čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ můžeme uvážit jako n dvojic čísel (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_n, b_n). Libovolná dvojice (a_i, b_i) může nezávisle nabývat $(2c_i + 1)$ různých hodnot $(0, c_i)$, $(1, c_i)$, …, $(c_i - 1, c_i)$, (c_i, c_i), $(c_i, c_i - 1)$, …, $(c_i, 1)$, $(c_i, 0)$. Podle kombinatorického pravidla součinu dostáváme výše uvedený počet.

Prvočíselný rozklad čísla 1 001 je $7 \cdot 11 \cdot 13$. Aby měla daná rovnice právě 1 001 řešení, musí exponenty c_i z prvočíselného rozkladu čísla M (obsahujícího dle zadání nejméně tři prvočísla, a to 2, 3 a 5) vyhovovat rovnici $\prod_{i=1}^{n} (2c_i+1) = 7 \cdot 11 \cdot 13$. V prvočíselném rozkladu čísla M tedy musí být zastoupena právě tři prvočísla, a to v mocninách $\frac{1}{2}(7 - 1) = 3$, $\frac{1}{2}(11 - 1) = 5$ a $\frac{1}{2}(13 - 1) = 6$. Protože M má být dělitelné číslem $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, tedy prvočísly 2, 3 a 5 v odpovídajících mocninách, jsou jediné možné volby pro M čísla $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^6$, $2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^3$, $2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3$, $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^5$.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Dokažte, že mezi přirozenými čísly a, b, jejich nejmenším společným násobkem $[a, b]$ a jejich největším společným dělitelem (a, b) platí následující vztah:
$$ab = [a, b](a, b).$$
2. Dokažte, že pro počet dělitelů $\tau(n)$ čísla $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ platí $\tau(n) = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1)$.
3. Určete počet řešení (x, y) rovnice
$$\mathrm{NSD}(x, y) = 6,$$
takových, že jak x, tak y dělí číslo 5 400. ($\mathrm{NSD}(x, y)$ značí největšího společného dělitele čísel x a y.) [125]