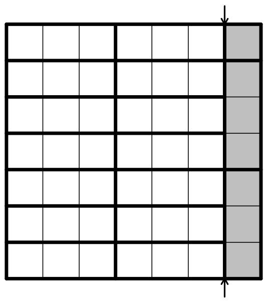
Úlohy domácího kola kategorie C

1. *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n, které je větší než 3 a není dělitelné třemi, platí: Šachovnici $n \times n$ lze rozřezat na jeden čtverec 1×1 a obdélníky 3×1.*

Řešení. Budeme-li přemýšlet, jak navrhovat postupy řezání šachovnic velkých rozměrů, jistě nás napadne myšlenka, že na obdélníky 3×1 lze rozřezat každý „pás“ šachovnice tvořený třemi sousedními řádky nebo sloupci. Takové pásy se proto vyplatí od šachovnice opakovaně odřezávat (dokud je to možné), a tak zmenšovat její rozměry o násobky tří. Proto bude pro naši úlohu o šachovnici $n \times n$ výhodné rozlišit, zda dané číslo $n > 3$ dává při dělení třemi zbytek 1, anebo zbytek 2 (zbytek 0 je zadáním vyloučen). Každý z těchto případů prozkoumáme odděleně.

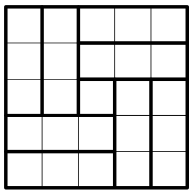
Případ $n = 3k + 1$. Nejprve z šachovnice $(3k + 1) \times (3k + 1)$ odřežeme pás prvních $3k$ sloupců, tedy obdélník $(3k + 1) \times 3k$, který pak rozřežeme (po trojicích sloupců) na k pásů $(3k+1)\times 3$ a každý z nich konečně rozřežeme na $3k+1$ obdélníků 1×3. Z původní šachovnice nám pak zůstane nerozřezán poslední sloupec; protože má $3k+1$ polí, snadno ho rozřežeme na jeden čtverec 1×1 a k obdélníků 3×1. Na obr. 1 je znázorněno výsledné rozřezání šachovnice 7×7 (počáteční odřezání pásu 7×6 je vyznačeno šipkami, zbylý sloupec je šedý). Ze stejného obrázku nahlédneme i způsob řešení pro $n = 4$.



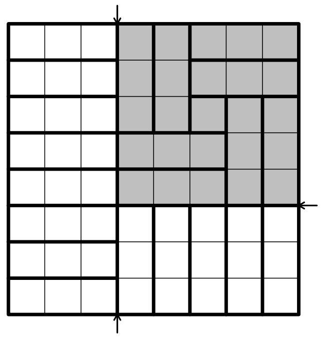
Obr. 1

Případ $n = 3k + 2$. Kdybychom šachovnici $(3k + 2) \times (3k + 2)$ důsledně „ořezávali“ postupem z úvodu řešení, dostali bychom (po oddělení dvou pásů $(3k+2)\times 3k$ a $3k \times 2$) jako zbytek šachovnici 2×2, kterou však není možné rozřezat požadovaným způsobem (na díly 1×1 a 3×1). To je možné provést až s „následující“ šachovnicí 5×5, jak vidíme na obr. 2.

Zbývá popsat, jak každou větší šachovnici $(3k+2)\times(3k+2)$ řezáním zredukovat na právě posouzený čtverec 5×5. Nejprve oddělíme pás $(3k+2)\times(3k-3)$ tvořený prvními $(k-1)$ trojicemi sloupců šachovnice; ze zbylé šachovnice $(3k+2)\times 5$ pak oddělíme pás $(3k-3)\times 5$ tvořený jejími posledními $(k-1)$ trojicemi řádků, z původní šachovnice pak zbude kýžený čtverec 5×5 v pravém horním rohu (šedý na obr. 3 pro šachovnici 8×8).



Obr. 2



Obr. 3

Dodejme, že při řešení dané úlohy jsme nebrali v úvahu obarvení polí šachovnice. Barvy polí se uplatňují v jiných situacích, zejména tehdy, když potřebujeme dokázat, že rozřezání šachovnice na díly předepsaného tvaru není možné (doplňující úlohy 4 a 5).

NÁVODNÉ ÚLOHY:

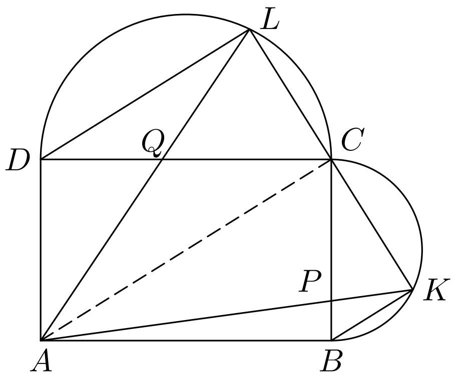
1. Určete rozměry šachovnic $m \times n$, $m \geqq n > 1$, které lze rozřezat na 35 dílů 3×1. [35×3, 21×5, 15×7]
2. Dokažte, že šachovnici $2\,000 \times 2\,001$ lze rozřezat na obdélníky 5×1, ale šachovnici $2\,003 \times 2\,004$ na obdélníky 5×1 rozřezat nelze. Zobecněte. [Zobecnění: Je-li p prvočíslo a m, n čísla přirozená, pak šachovnici $m \times n$ lze rozřezat na obdélníky $p \times 1$, právě když p dělí aspoň jedno z čísel m, n. (Uvažte, že poslední podmínka znamená totéž, co $p \mid mn$.)]
3. Z šachovnice 7×7 jsme odřízli jedno rohové pole. Lze zbylou šachovnici rozřezat na 16 obdélníků 3×1? [Ano. Rozdělte zbylou šachovnici na pásy 6×7 a 6×1.]
4. Z šachovnice 8×8 jsme odřízli dvě protilehlá rohová pole. Dokažte, že zbytek šachovnice nelze rozřezat na 31 obdélníků 2×1. [Každý obdélník 2×1 obsahuje jedno černé a jedno bílé pole; daný zbytek šachovnice má různé počty bílých a černých polí.]
5. Z šachovnice 7×7 jsme odřízli jedno rohové pole. Lze zbylou šachovnici rozřezat na 12 obdélníků 4×1? [Ne. Označte pole šachovnice čtyřmi písmeny A, B, C, D v uvedeném pořadí zleva doprava v každém řádku a shora dolů v každém sloupci. Po odříznutí rohového pole zůstane 11 polí A, 12 polí B, 13 polí C a 12 polí D (obr. 4), každý obdélník 4×1 však obsahuje po 1 poli každého písmena.]

A	B	C	D	A	B	C
B	C	D	A	B	C	D
C	D	A	B	C	D	A
D	A	B	C	D	A	B
A	B	C	D	A	B	C
B	C	D	A	B	C	D
C	D	A	B	C	D	

Obr. 4

2. *Je dán obdélník $ABCD$. Nechť přímky p a q, které procházejí vrcholem A, protínají polokružnice vně připsané stranám BC a CD daného obdélníku po řadě v bodech K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq D$) a rovněž strany BC a CD po řadě v bodech P a Q tak, že trojúhelník ABP má stejný obsah jako trojúhelník KCP a zároveň trojúhelník AQD má stejný obsah jako trojúhelník CLQ. Dokažte, že body K, L, C leží na téže přímce.*

ŘEŠENÍ. Trojúhelníky ABP a KCP mají podle zadání stejné obsahy; připojíme-li ke každému z nich trojúhelník ACP (obr. 5), usoudíme, že stejné obsahy mají i trojúhelníky ABC a AKC. Protože strana AC je oběma těmto trojúhelníkům společná, obě k ní příslušné výšky musí být shodné. Body B a K tudíž mají stejnou vzdálenost od přímky AC (a leží ve stejné polorovině touto přímkou určené). To znamená, že $BK \parallel AC$. Podle Thaletovy věty ovšem platí $BK \perp CK$, takže platí rovněž $AC \perp CK$.



Obr. 5

Podobně z rovnosti obsahů trojúhelníků AQD, CLQ a kolmosti přímek CL a DL odvodíme, že $AC \perp CL$. Dohromady to znamená, že úhel KCL je složen ze dvou pravých úhlů ACK a ACL. Body K a L tudíž leží na přímce, která prochází bodem C kolmo k úhlopříčce AC.

Návodné úlohy:

1. Nechť P značí průsečík úhlopříček obecného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že přímky AB a CD jsou rovnoběžné, právě když trojúhelníky ADP a BCP mají stejný obsah. [Rovnost obsahů trojúhelníků ADP a BCP je ekvivalentní s rovností obsahů trojúhelníků ABC a ABD se společnou stranou AB.]
2. Sestrojte přímku, která prochází vrcholem A daného obdélníku $ABCD$, protíná stranu BC ve vnitřním bodě P a polokružnici vně připsanou straně BC v bodě K tak, že trojúhelníky ABP a KCP mají stejný obsah. [Podle první části řešení soutěžní úlohy odvoďte, že $CK \perp AC$.]

3. *Žák měl vypočítat příklad $X \cdot Y : Z$, kde X je dvojmístné číslo, Y trojmístné číslo a Z trojmístné číslo s číslicí 2 na místě jednotek. Výsledkem příkladu mělo být přirozené číslo. Žák však tečku přehlédl a součin $X \cdot Y$ chápal jako pětimístné číslo. Získal tak sedmkrát větší výsledek, než měl vyjít. Jaký příklad měl žák počítat?*

Řešení. Protože Y je trojmístné číslo, pětimístné číslo se zápisem XY je číslo $1\,000X + Y$. Žák tedy počítal příklad $(1\,000X + Y) : Z$ a podle textu úlohy mu v porovnání s původním příkladem vyšel sedmkrát větší výsledek, tedy

$$\frac{1\,000X + Y}{Z} = 7 \cdot \frac{X \cdot Y}{Z}.$$

Odtud po násobení číslem Z dostaneme rovnici $1\,000X + Y = 7XY$, kterou vyřešíme vzhledem k neznámé Y:

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1}.$$

Pro která X je poslední zlomek celočíselný? Jinak vyjádřeno: kdy je číslo $1\,000X$ dělitelné číslem $7X - 1$? Protože čísla X a $7X - 1$ jsou nesoudělná (nesoudělná jsou totiž dvě po sobě jdoucí čísla $7X - 1$ a $7X$), hledáme ta X, pro která číslo $7X - 1$ dělí číslo $1\,000$. Abychom nemuseli vypisovat všechny dělitele čísla $1\,000$, uvědomíme si, že X je dvojmístné, tudíž $69 \leqq 7X - 1 \leqq 692$. Rozložme proto číslo 1 000 všemi způsoby na součin dvou činitelů tak, aby jeden (řekněme první) z činitelů byl z intervalu $\langle 69, 692\rangle$:

$$1\,000 = 500 \cdot 2 = 250 \cdot 4 = 200 \cdot 5 = 125 \cdot 8 = 100 \cdot 10.$$

Z rovnic

$$7X - 1 = 500,\ 7X - 1 = 250,\ 7X - 1 = 200,\ 7X - 1 = 125,\ 7X - 1 = 100$$

má jedině rovnice $7X - 1 = 125$ celočíselné řešení $X = 18$, pro něž vychází $Y = 1\,000X/(7X - 1) = 1\,000 \cdot 18/125 = 144$.

Nyní určíme neznámé číslo Z. Využijeme k tomu podmínku úlohy, že hodnota výrazu $X \cdot Y : Z$ je přirozené číslo. Protože $X = 18$ a $Y = 144$, jedná se o číslo $18 \cdot 144 : Z$, tedy číslo $2^5 \cdot 3^4 : Z$. Takové číslo je celé, právě když má číslo Z rozklad na prvočinitele tvaru $2^a 3^b$, kde $0 \leqq a \leqq 5$ a $0 \leqq b \leqq 4$. Exponenty a, b najdeme z podmínky, že číslo $Z = 2^a 3^b$ je podle zadání trojmístné a na místě jednotek má číslici 2. Protože $3^4 = 81$ a $2^5 \cdot 3 = 96$, musí být $a \geqq 1$ a $b \geqq 2$. Všechna čísla $2^a 3^b$, kde $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $b \in \{2, 3, 4\}$ teď vypíšeme do tabulky:

$b \diagdown a$	1	2	3	4	5
2	18	36	72	144	288
3	54	108	216	432	864
4	162	324	648	1 296	2 592

Z vypočtených čísel mají požadovanou vlastnost pouze čísla $Z = 432 = 2^4 3^3$ a $Z = 162 = 2^1 3^4$.

Odpověď: Úloha má dvě řešení. Žák měl počítat buď příklad $18 \cdot 144 : 432$, nebo příklad $18 \cdot 144 : 162$.

Jiné řešení. Jako v prvním řešení odvodíme vyjádření

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1},$$

tentokrát však získaný zlomek upravíme částečným vydělením čísla 1 000 číslem 7. Na základě rovnosti $1\,000 = 7 \cdot 143 - 1$ dostáváme

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1} = \frac{143(7X - 1) + 143 - X}{7X - 1} = 143 + \frac{143 - X}{7X - 1}.$$

Aby bylo Y celé, musí být poslední zlomek $(143 - X)/(7X - 1)$ celočíselný. Protože číslo X je dvojmístné, náš zlomek splňuje odhady

$$\frac{143 - 99}{7 \cdot 99 - 1} < \frac{143 - X}{7X - 1} < \frac{143 - 10}{7 \cdot 10 - 1}.$$

Levý zlomek je roven 44/692, pravý je roven 133/69, takže jediná možná celočíselná hodnota prostředního zlomku je rovna 1. Musí tedy být $Y = 144$. Rovnice

$$\frac{143 - X}{7X - 1} = 1$$

pak má jediné řešení $X = 18$. Dále už postupujeme jako v prvním řešení.

Další řešení. Dříve získanou rovnici $1\,000X + Y = 7XY$ upravíme do součinového tvaru $Y = X \cdot (7Y - 1\,000)$. Musí proto platit $7Y - 1\,000 > 0$, odkud

$$Y > \frac{1\,000}{7} > 142, \quad \text{neboli} \quad Y \geqq 143.$$

Číslo X je dvojmístné, proto z rovnosti $Y = X \cdot (7Y - 1\,000)$ vychází odhad

$$Y \geqq 10 \cdot (7Y - 1\,000), \quad \text{neboli} \quad Y \leqq \frac{10\,000}{69} < 145.$$

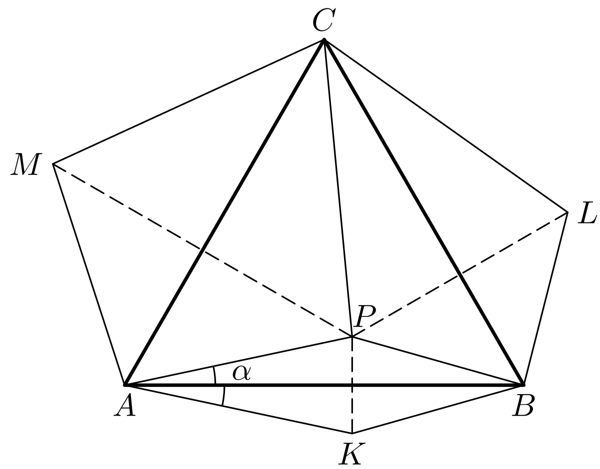
Dohromady dostáváme, že číslo Y je rovno jednomu z čísel 143 nebo 144. Rovnice $143 = X \cdot (7 \cdot 143 - 1\,000)$ má řešení $X = 143$, což ovšem není dvojmístné číslo; rovnice $144 = X \cdot (7 \cdot 144 - 1\,000)$ má řešení $X = 18$. Tak jsme znovu ukázali, že $X = 18$ a $Y = 144$; číslo Z určíme jako v prvním řešení.

Návodné úlohy:

1. Michal zvolil dvě dvojmístná čísla. Když je napsal za sebe, dostal čtyřmístné číslo, které bylo dvakrát větší než součin obou zvolených čísel. Která čísla to byla? [13 a 52. Rovnici $100X + Y = 2XY$ lze řešit libovolným ze tři postupů vyložených v řešení soutěžní úlohy.]
2. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je zlomek $(n^2 + 2\,003)/(n + 2\,003)$ roven celému číslu. [$n = 1$ a $n = 2\,003k$, kde $k+1$ je libovolný dělitel čísla 2 004. Daný zlomek upravte na tvar $n - 2\,003 + (2\,003 \cdot 2\,004)/(n + 2\,003)$ a pak využijte toho, že 2 003 je prvočíslo.]

4. *Nechť P je libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových souměrnostech s osami AB, BC a CA. Určete množinu všech bodů P takových, že trojúhelník KLM je rovnoramenný.*

Řešení. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAP|$, $0° < \alpha < 60°$ (obr. 6). Protože úhly BAP



Obr. 6

a BAK jsou souměrně sdružené podle osy AB, platí rovněž $|\sphericalangle BAK| = \alpha$. Protože $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle BAP| = 60° - \alpha$, ze souměrnosti podle osy CA plyne rovnost $|\sphericalangle CAM| = 60° - \alpha$. Pro velikost úhlu KAM tudíž platí

$$|\sphericalangle KAM| = |\sphericalangle BAK| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAM| = \alpha + 60° + (60° - \alpha) = 120°.$$

Ze souměrností podle os AB a CA rovněž plynou rovnosti $|AK| = |AP| = |AM|$. Proto je trojúhelník KAM rovnoramenný a jeho úhel při hlavním vrcholu A má velikost $120°$. Podobně se zdůvodní, proč i trojúhelníky LBK a MCL jsou rovnoramenné a jejich vnitřní úhly při hlavních vrcholech B a C mají velikost $120°$.

Při posuzování podmínky, že trojúhelník KLM je rovnoramenný, musíme rozlišit, které z jeho stran KL, LM, MK jsou shodné. S ohledem na symetrii rozebereme podrobně pouze případ, kdy $|KL| = |MK|$. Z podobných rovnoramenných trojúhelníků KAM a LBK vyplývá, že jejich základny MK a KL jsou shodné, právě když jsou shodná jejich ramena AK a BK. Zapišme to pomocí délek úseček: rovnost $|KL| = |MK|$ platí, právě když platí rovnost $|AK| = |BK|$, neboli rovnost $|AP| = |BP|$. Poslední rovnost ovšem nastane, právě když bod P leží na ose strany AB. Obdobně se zjistí podmínky ekvivalentní rovnostem $|MK| = |LM|$ a $|KL| = |LM|$.

Odpověď: Trojúhelník KLM je rovnoramenný, právě když bod P leží na aspoň jedné z os stran daného rovnostranného trojúhelníku ABC. Hledaná množina je proto sjednocením tří úseček – výšek trojúhelníku ABC (bez jejich krajních bodů).

Návodné úlohy:

1. Nechť P je vnitřní bod konvexního úhlu BAC. Označme K a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB a AC. Určete možné velikosti úhlu KAM v případech, kdy je úhel BAC a) ostrý, b) tupý. [a) $|\sphericalangle KAM| = 2 \cdot |\sphericalangle BAC|$, b) $|\sphericalangle KAM| = 360° - 2 \cdot |\sphericalangle BAC|$.]
2. Nechť P je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC s daným obsahem S. Označme K, L a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB, BC a CA. Vypočtěte obsah šestiúhelníku $AKBLCM$ a zjistěte, kdy je tento šestiúhelník pravidelný. [Obsah je vždy $2S$, šestiúhelník je pravidelný pouze v případě, kdy je trojúhelník ABC rovnostranný a bod P je jeho těžiště.]

5. *Přirozené číslo nazveme magickým, právě když je lze rozložit na součet dvou trojmístných čísel zapsaných stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí. Například číslo* 1 413 *je magické, neboť platí* $1\,413 = 756 + 657$*; nejmenší magické číslo je* 202.
a) Určete počet všech magických čísel.
b) Ukažte, že součet všech magických čísel je roven 187 000.

Řešení. Na příkladu čísla 1 413 vidíme, že někdy není snadné poznat, zda dané troj- či čtyřmístné číslo je magické či nikoliv. Podíváme se proto nejdříve, jak se magické číslo x vyjádří pomocí číslic těch trojmístných čísel $\overline{abc}$ a $\overline{cba}$, jejichž je součtem:

$$x = \overline{abc} + \overline{cba} = (100a + 10b + c) + (100c + 10b + a) = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že číslo x je určeno číslicemi a, b, c tak, že závisí jen na b a na součtu $a + c$. Znamená to, že různé trojice číslic a, b, c mohou určovat totéž magické číslo x (nemyslíme tím pouze trojice lišící se vzájemnou výměnou číslic a a c). Je-li např. $a+c=14$ a $b=9$, najdeme tři různá vyjádření magického čísla 1 594:

$$1\,594 = 599 + 995 = 698 + 896 = 797 + 797.$$

Existují ještě jiná „magická“ vyjádření čísla 1 594? Vše závisí na tom, zda jsou rovnicí $1\,594 = 101s + 20b$ hodnoty součtu číslic $s = a + c$ a číslice b jednoznačně určeny. Z rovnice ihned vidíme, že číslo s končí číslicí 4, takže $s = 4$ nebo $s = 14$ (jiné hodnoty součtu $s = a + c$ nejsou číslicemi a, c dosažitelné). Zatímco hodnotě $s = 14$ odpovídá (jak dobře víme) hodnota $b = 9$, pro $s = 4$ dostaneme rovnici $1\,594 = 404 + 20b$, která nemá celočíselné řešení.

Poučeni uvedeným příkladem, pokusíme se stanovit počet magických čísel jako počet čísel tvaru $x = 101s + 20b$, kde číslo s (rovné součtu číslic a a c, jež jsou *nenulové*) probíhá množinu $\{2, 3, 4, \dots, 18\}$, zatímco číslice b probíhá (nezávisle na součtu s) množinu $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Protože číslo s nabývá celkem 17 různých hodnot a číslo b celkem 10 různých hodnot, je počet všech dvojic (s, b), které můžeme do vzorce $x = 101s + 20b$ dosadit, roven číslu $17 \cdot 10 = 170$. Ukážeme-li nyní, že po dosazení libovolných dvou různých dvojic (s_1, b_1) a (s_2, b_2) dostaneme dvě různá magická čísla

$$x_1 = 101s_1 + 20b_1 \quad \text{a} \quad x_2 = 101s_2 + 20b_2,$$

bude to znamenat, že počet všech hodnot x (tedy *počet všech magických čísel*) je rovněž roven číslu 170.

Připusťme, že pro některé dvojice (s_1, b_1) a (s_2, b_2) platí $x_1 = x_2$. Rovnost $101s_1 + 20b_1 = 101s_2 + 20b_2$ upravíme do tvaru $101(s_1 - s_2) = 20(b_2 - b_1)$, z něhož vzhledem k nesoudělnosti čísel 20 a 101 vyplývá, že číslo $b_2 - b_1$ je násobkem čísla 101. Musí jít přitom o nulový násobek, neboť $|b_2 - b_1| \leqq 9$ (b_1 a b_2 jsou číslice!). Platí tedy $b_2 - b_1 = 0$, takže rovněž $s_1 - s_2 = 0$, což dohromady znamená, že dvojice (s_1, b_1) a (s_2, b_2) jsou stejné. Jen v tomto případě je tedy rovnost $x_1 = x_2$ možná.

Součet všech magických čísel (tedy čísel tvaru $x = 101s + 20b$) určíme výhodně, když čísla nejprve uspořádáme do obdélníkového schématu (podle stejných hodnot s do řádků a podle stejných hodnot b do sloupců)

$$\begin{array}{ccccc}
101 \cdot 2 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 2 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 2 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 2 + 20 \cdot 9 \\
101 \cdot 3 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 3 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 3 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 3 + 20 \cdot 9 \\
101 \cdot 4 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 4 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 4 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 4 + 20 \cdot 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
101 \cdot 17 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 17 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 17 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 17 + 20 \cdot 9 \\
101 \cdot 18 + 20 \cdot 0 & 101 \cdot 18 + 20 \cdot 1 & 101 \cdot 18 + 20 \cdot 2 & \dots & 101 \cdot 18 + 20 \cdot 9
\end{array}$$

a pak čísla sečteme buď po sloupcích, nebo po řádcích. Rozhodneme se pro sčítání po sloupcích, přitom budeme brát v úvahu, o kolik se čísla uvažovaného sloupce liší od příslušných čísel prvního sloupce. Součet čísel v prvním sloupci je

$$101 \cdot (2 + 3 + \dots + 18) = 101 \cdot 170,$$

ve druhém sloupci je součet $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 1$, ve třetím $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 2$, atd. až v posledním (desátém) sloupci je součet čísel roven $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 9$. Součet všech magických čísel je tedy roven

$$10 \cdot 101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 187\,000.$$

Návodné úlohy:

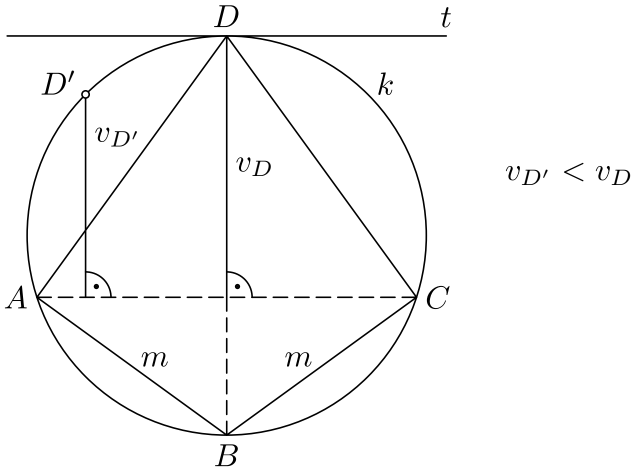
1. Najděte nejmenší a největší magické číslo dělitelné třinácti. [403, 1 898.]
2. Určete počet čísel, která lze rozložit na součet dvou dvojmístných čísel zapsaných stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí. [17. Jedná se o čísla $11s$, kde $s \in \{2, 3, 4, \ldots, 18\}$.]
3. Nechť x, y a z jsou dvojmístná čísla. Napišme je za sebe a potom ještě jednou, ale v opačném pořadí. Vzniknou tak dvě šestimístná čísla (např. z čísel 25, 36 a 47 vzniknou čísla 253 647 a 473 625); dokažte, že jejich rozdíl je dělitelný číslem 101. [$(10\,000x + 100y + z) - (10\,000z + 100y + x) = 9\,999(x - z) = 101 \cdot 99 \cdot (x - z)$.]

6. *Ze všech čtyřúhelníků, jež lze vepsat do kružnice o daném poloměru r a které mají dvě strany dané délky m, určete ten, který má největší obsah.*

Řešení. V celém řešení budeme předpokládat, že dané délky m a r splňují nerovnost $m < 2r$, jinak žádný čtyřúhelník požadovaných vlastností neexistuje. Strany délky m každého takového čtyřúhelníku jsou totiž tětivami kružnice o poloměru r a nejvýše jedna z nich může být jejím průměrem.

Zkoumané čtyřúhelníky rozdělíme do dvou skupin podle toho, zda jsou jejich strany dané délky m sousední, nebo protilehlé.

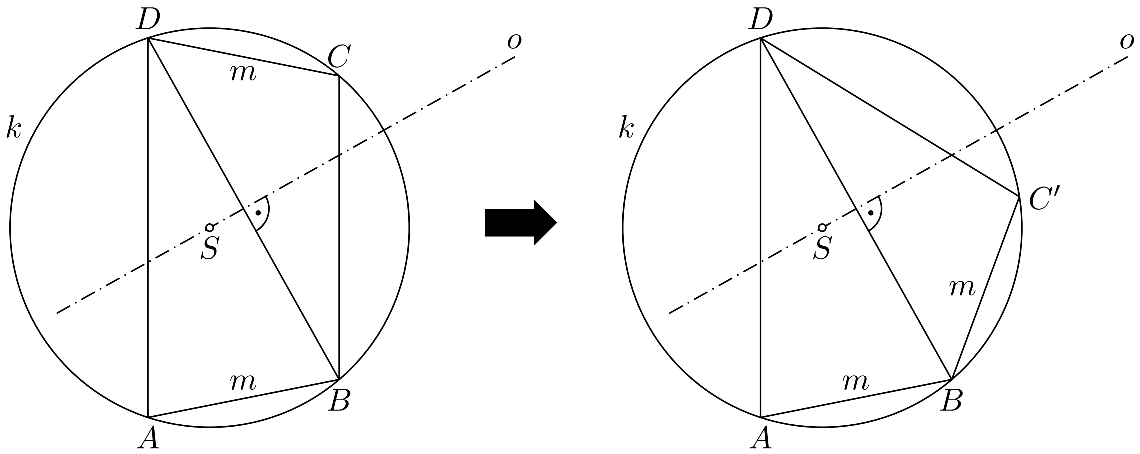
Libovolný čtyřúhelník z první skupiny označíme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |BC| = m$. Úhlopříčka rozdělí tento tětivový čtyřúhelník na dva trojúhelníky ABC a ACD (obr. 7), přitom je jasné, že první z nich, trojúhelník ABC, je poloměrem r



Obr. 7

opsané kružnice k a délkou m dvou jeho stran určen (až na shodnost) jednoznačně, takže má pevně určený obsah. Proto bude obsah takového čtyřúhelníku $ABCD$ maximální, právě když bude maximální obsah trojúhelníku ACD. Tento trojúhelník má určenou délku strany AC, takže jeho obsah bude maximální, právě když bude maximální jeho výška v_D z vrcholu D. Při pevné poloze trojúhelníku ABC bod D probíhá ten oblouk AC kružnice k, jenž neobsahuje bod B, takže výška v_D je zřejmě největší, právě když bod D je středem tohoto oblouku, leží tedy (stejně jako bod B) na ose úsečky AC. (Tvrzení zdůvodníme pomocí tečny t ke kružnici k, jež prochází nalezeným bodem D rovnoběžně s přímkou AC, obr. 7). Tak docházíme k závěru, že v první skupině má maximální obsah ten čtyřúhelník, který je deltoid (je-li $m \neq r\sqrt{2}$), respektive čtverec (je-li $m = r\sqrt{2}$).

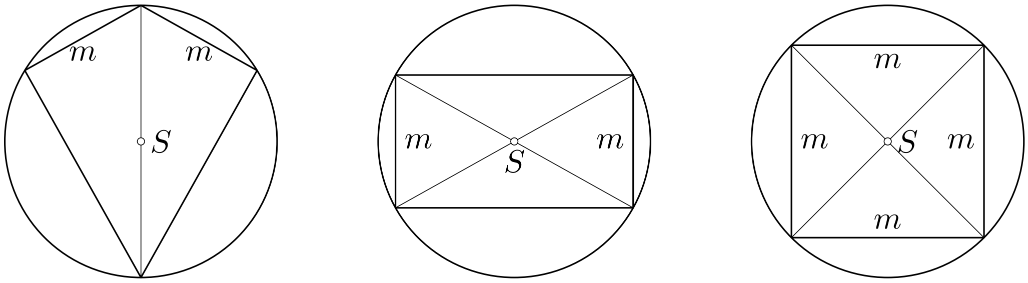
Přejděme nyní ke čtyřúhelníkům druhé skupiny. Libovolný z nich označme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |CD| = m$ (obr. 8).



Obr. 8

Obrázek ukazuje, jak k takovému čtyřúhelníku $ABCD$ sestrojit pomocný čtyřúhelník $ABC'D$, který má stejný obsah jako $ABCD$, je vepsán do téže kružnice k a má sousední strany AB a BC' dané délky m. Konstrukci teď popíšeme a zmíněné vlastnosti čtyřúhelníku $ABC'D$ podrobně zdůvodníme. Bod C' sestrojíme jako obraz bodu C v souměrnosti podle osy o úsečky BD; protože je kružnice k souměrná podle osy každé své tětivy, platí $C' \in k$. Trojúhelníky BCD a $DC'B$ jsou souměrně sdružené podle osy o, takže mají stejný obsah, tudíž stejný obsah mají i čtyřúhelníky $ABCD$ a $ABC'D$. Ze zmíněné souměrnosti rovněž plynou rovnosti $|CD| = |BC'|$ a $|BC| = |DC'|$, takže čtyřúhelníky $ABCD$ a $ABC'D$ se liší pouze „prohozením“ dvou sousedních stran. Tím jsou potřebné vlastnosti čtyřúhelníku $ABC'D$ zdůvodněny. Jak už víme z předchozího odstavce, čtyřúhelník $ABC'D$ má největší možný obsah, právě když platí rovnost $|C'D| = |AD|$, kterou můžeme přepsat jako rovnost $|BC| = |AD|$. Ta nastane, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ rovnoběžník (neboť od počátku předpokládáme, že $|AB| = |CD|$). Každý rovnoběžník vepsaný do kružnice je ale pravoúhelník (součet protilehlých vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je $180°$, takové úhly jsou ale v případě rovnoběžníku shodné, a tedy pravé). Shrňme výsledek tohoto odstavce: ve druhé skupině čtyřúhelníků má maximální obsah ten čtyřúhelník, který je obdélník (je-li $m \neq r\sqrt{2}$), respektive čtverec (je-li $m = r\sqrt{2}$.)

Celkový závěr: Hledané čtyřúhelníky s maximálním obsahem tvoří v případě $m < 2r$, $m \neq r\sqrt{2}$, dvě skupiny: skupinu shodných deltoidů a skupinu shodných obdélníků; v případě $m = r\sqrt{2}$ jsou všechny hledané čtyřúhelníky shodné čtverce (obr. 9). (V případě $m \geqq 2r$ je množina uvažovaných čtyřúhelníků prázdná).



Obr. 9

Návodné úlohy:

1. V kružnici k o poloměru 7 je dána tětiva AB délky 13. Zjistěte, jaký největší obsah může mít čtyřúhelník $AXBY$, leží-li jeho vrcholy X, Y na kružnici k. [Největší obsah 91 má deltoid, jehož úhlopříčka XY je průměrem kružnice k.]
2. Do jedné kružnice jsou vepsány dva pětiúhelníky $ABCDE$ a $ABFGH$, přičemž platí $|AB| = 4$, $|BC| = |GH| = 5$, $|CD| = |BF| = 6$, $|DE| = |HA| = 7$ a $|EA| = |FG| = 8$. Dokažte, že oba pětiúhelníky mají stejný obsah. [Rozložte pětiúhelníky na rovnoramenné trojúhelníky pomocí úseček spojujících jejich vrcholy se středem opsané kružnice.]