53. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie A

1. Nechť $P(x) = ax^2 + bx + c$ je kvadratický trojčlen s nezápornými reálnými koeficienty. Dokažte, že pro libovolné kladné číslo x platí

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \geqq \bigl(P(1)\bigr)^2.$$

2. Určete, jakou největší délku může mít úhlopříčka CE konvexního pětiúhelníku $ABCDE$, jehož strana AB má délku 6 cm, vnitřní úhly při vrcholech C a E jsou pravé a úhel ADB má velikost 120°.

3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz &= 6(y + z - 2),\\ y^2 + 2zx &= 6(z + x - 2),\\ z^2 + 2xy &= 6(x + y - 2). \end{aligned}$$

Školní – klauzurní část I. kola kategorie A se koná

v úterý 2. prosince 2003

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Protože $P(x)$ je kvadratický trojčlen s nezápornými koeficienty, je nutně $a > 0$. Nechť x je libovolné kladné reálné číslo a n přirozené. Protože

$$0 \leqq \left(\sqrt{x^n} - \frac{1}{\sqrt{x^n}}\right)^2 = x^n + \frac{1}{x^n} - 2,$$

platí

$$x^n + \frac{1}{x^n} \geqq 2, \tag{1}$$

přitom rovnost nastává, právě když $\sqrt{x^n} = \dfrac{1}{\sqrt{x^n}}$, tj. když $x = 1$.

Protože čísla ab, bc a ca jsou podle předpokladů úlohy nezáporná, užitím nerovnosti (1) dále platí

$$\begin{aligned} P(x) \cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) &= (ax^2 + bx + c)\Big(a\,\frac{1}{x^2} + b\,\frac{1}{x} + c\Big) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + bc\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + ca\Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) \geqq \\ &\geqq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = \big(P(1)\big)^2. \end{aligned}$$

Rovnost nastává, právě když $x = 1$, nebo $ab = bc = ca = 0$, což s ohledem na podmínku $a > 0$ dává $b = c = 0$.

Pro libovolné kladné reálné číslo x tedy platí

$$P(x) \cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) \geqq \big(P(1)\big)^2,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, je-li $x = 1$ nebo $b = c = 0$.

Poznámka. Úlohu lze také řešit užitím Cauchyovy nerovnosti:

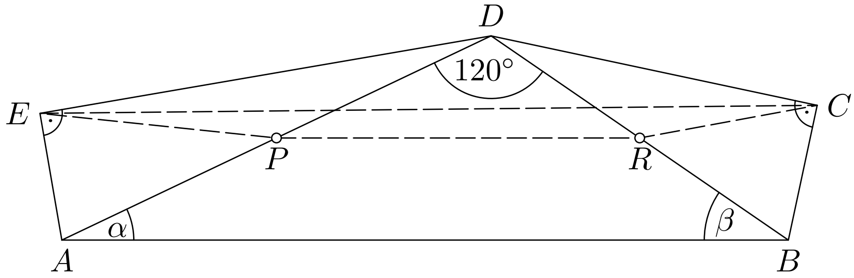
$$\begin{aligned} P(x) \cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) &= (ax^2 + bx + c)\Big(a\,\frac{1}{x^2} + b\,\frac{1}{x} + c\Big) = \\ &= \Big(\big(\sqrt{a}x\big)^2 + \big(\sqrt{bx}\big)^2 + \big(\sqrt{c}\big)^2\Big)\left(\Big(\frac{\sqrt{a}}{x}\Big)^2 + \Big(\sqrt{\frac{b}{x}}\Big)^2 + \big(\sqrt{c}\big)^2\right) \geqq \\ &\geqq \left(\sqrt{a}x \cdot \frac{\sqrt{a}}{x} + \sqrt{bx} \cdot \sqrt{\frac{b}{x}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c}\right)^2 = (a + b + c)^2 = \big(P(1)\big)^2. \end{aligned}$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za takové se považuje i řešení, ve kterém není uvedeno, kdy v dokázané nerovnosti nastane rovnost.

2. Nechť $ABCDE$ je libovolný konvexní pětiúhelník s uvažovanými vlastnostmi. Označme P, R po řadě středy stran AD, BD trojúhelníku ABD (obr. 1). Pak bude

$$|PR| = \frac{1}{2}|AB|, \qquad |CR| = \frac{1}{2}|BD|, \qquad |PE| = \frac{1}{2}|AD|, \tag{1}$$

protože PR je střední příčka trojúhelníku ABD a protože v pravoúhlém trojúhelníku je střed přepony zároveň středem jeho opsané kružnice (Thaletova věta).



Obr. 1

Z trojúhelníkové nerovnosti je zřejmé, že pro délku úhlopříčky CE platí

$$|CE| \leqq |CR| + |RP| + |PE| = s,$$

kde délka s lomené čáry $CRPE$ je podle (1) zároveň rovna polovině obvodu trojúhelníku ABD.

Dále zkoumejme, kdy bude mít trojúhelník ABD daných vlastností ($|AB| = 6\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ADB| = 120°$) největší obvod. Označíme-li α a β (obr. 1) velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A a B trojúhelníku ABD ($\alpha + \beta = 60°$), dostaneme ze sinové věty v trojúhelníku ABD

$$|BD| = |AB|\frac{\sin\alpha}{\sin 120°}, \quad |AD| = |AB|\frac{\sin\beta}{\sin 120°}.$$

Sečtením obou předchozích rovností vyjde

$$|AD| + |BD| = |AB|\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin 120°} = 2|AB|\,\frac{\sin 30°}{\sin 120°}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqq 2|AB|\frac{\sqrt{3}}{3},$$

přičemž rovnost v poslední nerovnosti nastává, právě když $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 1$, tj. pro $\alpha = \beta = 30°$. Trojúhelník ABD má tedy největší obvod, právě když je rovnoramenný a jeho úhly při základně AB mají velikost $30°$. Vzhledem k tomu, že $|AB| = 6\,\text{cm}$, platí pro libovolný pětiúhelník $ABCDE$ požadovaných vlastností

$$|CE| \leqq s = \frac{1}{2}(|AB| + |AD| + |BD|) \leqq \frac{1}{2}|AB|\left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \bigl(3 + 2\sqrt{3}\bigr)\,\text{cm}.$$

Přitom pro uvažovaný pětiúhelník $ABCDE$ v situaci, kdy trojúhelník ABD je rovnoramenný a vrcholy C, E leží na přímce RP, platí $|CE| = (3 + 2\sqrt{3})\,\text{cm}$.

Největší délka úhlopříčky CE pětiúhelníku $ABCDE$ vyhovujícího podmínkám úlohy je tedy $(3 + 2\sqrt{3})\,\text{cm}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel nedokáže, že trojúhelník ABD s největším obvodem je rovnoramenný (ale pouze tuto skutečnost uvede), udělte nejvýše 4 body, za náznak důkazu využívající vlastností elipsy 3 body. Pokud řešitel nepopíše dosažení horního odhadu pro délku úhlopříčky CE, strhněte 1 bod.

3. Odečtením první rovnice dané soustavy od druhé dostaneme rovnici

$$y^2 - x^2 + 2zx - 2yz = 6(z + x - 2) - 6(y + z - 2),$$

kterou upravíme na tvar

$$(x - y)(x + y - 2z + 6) = 0.$$

Podobně odečtením první rovnice soustavy od třetí dostaneme

$$(x - z)(x + z - 2y + 6) = 0.$$

Daná soustava je proto ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz - 6(y + z - 2) &= 0, \\ (x - y)(x + y - 2z + 6) &= 0, \\ (x - z)(x + z - 2y + 6) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Vzhledem ke druhé a třetí rovnici této soustavy je možno rozlišit čtyři případy.

1. Nechť $(x - y = 0) \wedge (x - z = 0)$. Pak $x = y = z$ a dosazením za y a z do první rovnice soustavy (2) dostaneme rovnici
$$3x^2 - 12x + 12 = 0,$$
která má dvojnásobný reálný kořen $x = 2$. Proto trojice $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ je v tomto případě jediným řešením dané soustavy.
2. Nechť $(x - y = 0) \wedge (x + z - 2y + 6 = 0)$. Pak $y = x$ a $z = x - 6$. Dosazením do první rovnice soustavy (2) dostaneme po úpravě rovnici
$$3x^2 - 24x + 48 = 0,$$
která má dvojnásobný reálný kořen $x = 4$. Proto trojice $(x, y, z) = (4, 4, -2)$ je v tomto případě jediným řešením dané soustavy.
3. Nechť $(x + y - 2z + 6 = 0) \wedge (x - z = 0)$. Podobně jako v předcházejícím případě dostaneme jediné řešení $(x, y, z) = (4, -2, 4)$.
4. Nechť $(x + y - 2z + 6 = 0) \wedge (x + z - 2y + 6 = 0)$. Odečtením druhé rovnice od první dostaneme, že $3y - 3z = 0$, tedy $y = z$. Z prvního předpokladu tak máme $y = x + 6$. Dosazením do první rovnice soustavy (2) dostaneme po úpravě rovnici
$$3x^2 + 12x + 12 = 0,$$
která má dvojnásobný reálný kořen $x = -2$. Proto trojice $(x, y, z) = (-2, 4, 4)$ je v tomto případě jediným řešením dané soustavy.

Daná soustava má v oboru reálných čísel čtyři řešení (x, y, z), kterými jsou trojice $(2, 2, 2)$, $(4, 4, -2)$, $(4, -2, 4)$ a $(-2, 4, 4)$.

Poznámka. Pokud si všimneme, že sečtením všech tří rovnic dané soustavy dostaneme po úpravě

$$(x + y + z - 6)^2 = 0,$$

pak např. z podmínky $z + x - 2y + 6 = 0$ přímo plyne $y = 4$, což předcházející úvahy zjednoduší.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za pouhé uvedení všech čtyř řešení úlohy (bez dalšího zdůvodnění) udělte nejvýše 2 body. Pokud řešitel rozebere pouze případ $x = y = z$, udělte 1 bod.