53. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie B

1. Zjistěte, kolik řešení má v oboru reálných čísel rovnice

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{x}{2\,004},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo, které nepřevyšuje číslo x.

2. Uveďte příklad množiny M dvojmístných čísel, jež má maximální počet prvků a přitom splňuje obě následující podmínky:
(i) Každá dvě čísla z M jsou nesoudělná.
(ii) Změníme-li pořadí číslic libovolného čísla z M, dostaneme opět číslo z množiny M.

3. Je dán lichoběžník $ABCD$ s ostrými úhly při základně AB. Na ní existuje bod E takový, že kružnice opsané trojúhelníkům AED a EBC mají vnější dotyk. Dokažte, že bod E leží na kružnici opsané trojúhelníku CDV, kde V je průsečík přímek AD a BC.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie B se koná

v úterý 27. ledna 2004

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Předpokládejme na okamžik, že celé číslo $k = \lfloor x \rfloor$ známe, dosaďme je do rovnice jako „parametr“ a získanou rovnici vyřešme:

$$x = k + \frac{x}{2\,004},$$
$$2\,004x = 2\,004k + x,$$
$$x = \frac{2\,004k}{2\,003}.$$

Budeme-li do posledního vzorce dosazovat jednotlivá celá čísla k, bude příslušné x skutečně řešením zkoumané rovnice, bude-li se jeho celá část rovnat právě číslu k, budou-li tedy platit nerovnosti

$$k \leqq \frac{2\,004k}{2\,003} < k + 1.$$

Zjistíme, která celá k vyhovují oběma nerovnostem. Levá nerovnost je ekvivalentní s nerovností $k \geqq 0$, pravá nerovnost s nerovností $k < 2\,003$. Hledaná k jsou tedy právě hodnoty $k \in \{0, 1, \ldots, 2\,002\}$, každá z nich určuje jediné řešení x, takže všech řešení x zadané rovnice je právě 2 003. Dodejme, že vyhovující k lze určit rovněž úpravou odvozeného vzorce do tvaru

$$x = \frac{2\,004k}{2\,003} = k + \frac{k}{2\,003},$$

z něhož je vidět, že číslo k je celou částí čísla x, právě když platí nerovnosti

$$0 \leqq \frac{k}{2\,003} < 1, \quad \text{neboli} \quad 0 \leqq k < 2\,003.$$

Jiné řešení. Protože pro každé reálné x platí $\lfloor x \rfloor \leqq x \leqq \lfloor x \rfloor + 1$, porovnáním se zadanou rovnicí dodejme k zjištění, že každé řešení x musí splňovat nerovnosti

$$0 \leqq \frac{x}{2\,004} < 1, \quad \text{neboli} \quad 0 \leqq x < 2\,004.$$

Číslo x splňující poslední nerovnosti bude řešením zkoumané rovnice, právě když hodnota $x - \dfrac{x}{2\,004}$ bude celočíselná. Protože platí

$$x - \frac{x}{2\,004} = \frac{2\,003x}{2\,004},$$

lze poslední podmínku vyslovit takto: číslo $2\,003x$ je celočíselným násobkem čísla 2 004. To s ohledem na nerovnosti $0 \leqq 2\,003x < 2\,003 \cdot 2\,004$ znamená, že číslo $2\,003x$ je rovno některému z čísel

$$0 \cdot 2\,004,\ 1 \cdot 2\,004,\ 2 \cdot 2\,004,\ \ldots,\ 2\,002 \cdot 2\,004,$$

takže zkoumaná rovnice má právě 2 003 řešení

$$\frac{0 \cdot 2\,004}{2\,003}, \frac{1 \cdot 2\,004}{2\,003}, \frac{2 \cdot 2\,004}{2\,003}, \ldots, \frac{2\,002 \cdot 2\,004}{2\,003}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel správným postupem odvodí všechna řešení x, avšak určí chybně (či vůbec neurčí) jejich počet, strhněte 1 bod. Za nalezení všech řešení x bez zdůvodnění, proč jiná řešení neexistují, udělte 3 body. Za zdůvodnění nerovností $0 \leqq x < 2004$ udělte 1 bod.

2. Kvůli podmínce (i) může být v množině M nejvýše jedno z čísel $11, 22, 33, \ldots, 99$ zapsaných dvěma stejnými číslicemi, která jsou vesměs dělitelná jedenácti. Kvůli podmínce (ii) a dělitelnosti dvěma tam zas nesmí být žádné číslo zapsané dvěma různými sudými číslicemi; s jednou sudou číslicí může být v M nejvýše jedna dvojice čísel $\overline{ab}$, $\overline{ba}$.

Zbývá posoudit, kolik může množina M obsahovat dvojic čísel $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ zapsaných dvěma různými lichými číslicemi a a b. Žádné z těchto čísel nesmí být dělitelné třemi (je-li číslo $\overline{ab}$ dělitelné třemi, je takové i číslo $\overline{ba}$), proto v úvahu připadá pouze sedm dvojic takových čísel: $(13, 31)$, $(17, 71)$, $(19, 91)$, $(35, 53)$, $(37, 73)$, $(59, 95)$ a $(79, 97)$. Kvůli dělitelnosti pěti, sedmi a devatenácti však může být v M pouze jedna z dvojic $(19, 91)$, $(35, 53)$ a $(59, 95)$, tedy nejvýše pět ze všech sedmi vypsaných dvojic.

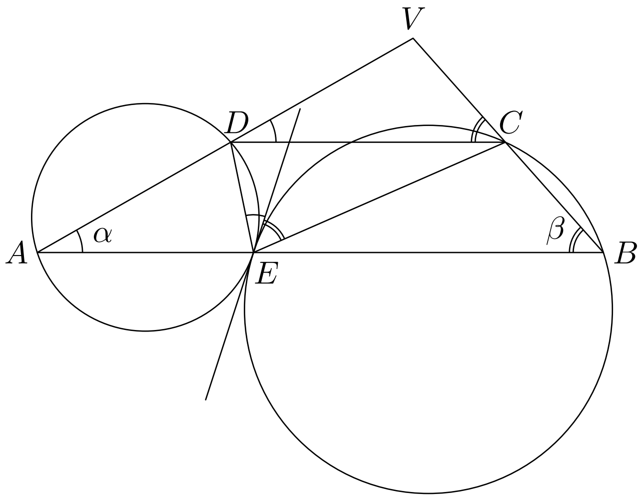
Celkově zjišťujeme, že množina M obsahuje nejvýše $1 + 2 + 2 \cdot 5 = 13$ čísel. Příkladem třináctiprvkové množiny je

$$\mathsf{M} = \{11, 23, 32, 13, 31, 17, 71, 35, 53, 37, 73, 79, 97\}.$$

(Existují i jiné příklady, naše úvahy však ukazují, že každá třináctiprvková množina M musí obsahovat čísla 13, 31, 17, 71, 37, 73, 79, 97 a jednu z dvojic $(35, 53)$ nebo $(59, 95)$; dvojice $(19, 91)$ je vyloučena, neboť číslo 91 je násobkem čísla 13.)

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za příklad třináctiprvkové množiny M a 3 body za zdůvodnění, proč množina M neobsahuje více než 13 čísel (při našem postupu 1 bod za úvahy o číslech dělitelných jedenácti a číslech se sudými číslicemi, 2 body za diskusi o číslech s lichými číslicemi).

3. Označme α a β po řadě vnitřní úhly při vrcholech A a B (obr. 1). Bodem E prochází společná tečna obou uvažovaných kružnic, úhel DEC je tedy součtem úsekových úhlů příslušných tětivě DE v jedné kružnici (s obvodovým úhlem α) a tětivě EC v druhé kružnici (s obvodovým úhlem β). Jeho velikost je tudíž $\alpha + \beta$. A protože velikost úhlu CVD je $180° - (\alpha + \beta)$, zjišťujeme, že ve čtyřúhelníku $CVDE$ se úhly u protějších vrcholů E a V doplňují do $180°$. To, jak víme, znamená, že $CVDE$ je tětivový čtyřúhelník, tj. bod E leží na kružnici opsané trojúhelníku CDV.



Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Většina řešitelů asi sáhne spíš k pracnějším výpočtům úhlů, protože s úsekovými úhly nemají mnoho zkušeností. V takovém případě doporučujeme je na vzorové řešení upozornit.