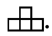
53. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie C

1. Určete počet všech trojmístných čísel, která jsou devatenáctkrát větší než součet jejich číslic.

2. Je dán čtverec o straně délky 5 cm. Mezi všemi čtyřúhelníky, které leží v tomto čtverci tak, že dvě jejich strany mají délku 2 cm a leží na hranici čtverce, určete všechny ty, které mají maximální obsah.

3. Dlaždičky A složené ze tří jednotkových čtverců mají tvar , dlaždičky B složené ze čtyř jednotkových čtverců mají tvar . Kolik dlaždiček jednotlivých typů potřebujeme na vydlaždičkování čtverce o straně 6 jednotek? Pro každý možný počet dlaždiček uveďte příklad takového pokrytí.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie C se koná

v úterý 27. ledna 2004

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Trojmístné číslo se zápisem $\overline{abc}$ má požadovanou vlastnost, právě když jeho číslice a, b, c splňují rovnost

$$100a + 10b + c = 19(a + b + c), \quad \text{neboli} \quad 9a = b + 2c.$$

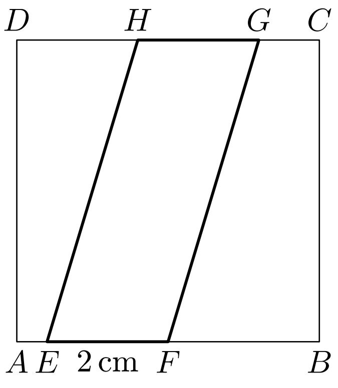
Protože $b \leqq 9$ a $c \leqq 9$, platí nerovnost $b + 2c \leqq 27$. Z rovnosti $9a = b + 2c$ proto plyne odhad $a \leqq 3$, takže platí $a \in \{1, 2, 3\}$ (číslice $a = 0$ není na začátku zápisu povolena). Pro $a = 1$ dostáváme rovnici $9 = b + 2c$, ze které plyne $c \leqq 4$; pro každé takové $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ je číslice b určena rovností $b = 9 - 2c$. Proto s číslicí $a = 1$ existuje právě 5 vyhovujících čísel. Právě tolik je i vyhovujících čísel s číslicí $a = 2$: z rovnice $18 = b + 2c$ totiž plyne $c \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ a $b = 18 - 2c$. Konečně pro $a = 3$ z rovnice $27 = b + 2c$ plyne $b = c = 9$. Hledaný počet čísel je tedy $5 + 5 + 1 = 11$.

Jiné řešení. Součet číslic libovolného trojmístného čísla nepřevyšuje číslo 27, jehož devatenáctinásobek je 513. Proto každé vyhovující číslo nepřevyšuje 513, takže součet jeho číslic je nejvýše $4 + 9 + 9 = 22$. Protože nejmenší trojmístný násobek čísla 19 je číslo $114 = 19 \cdot 6$, bude úloha vyřešena, když zjistíme, kolik čísel tvaru $19s$, kde $s \in \{6, 7, 8, \ldots, 22\}$, má součet číslic rovný právě číslu s. Rutinní prověrkou zjistíme, že ze zmíněných 17 čísel vyhovují právě čísla 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285 a 399. Těchto čísel je 11.

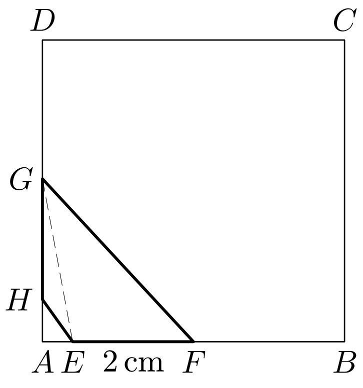
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho při prvním postupu 1 bod za sestavení výchozí rovnice a 1 bod za úpravu do tvaru $9a = b + 2c$, zbylé body podle úplnosti dalšího rozboru. Úplným řešením je i testování všech 47 trojmístných násobků devatenácti (řešitel by pak ale měl do řešení vypsat alespoň testovaná čísla, která podmínce úlohy vyhovují).

2. Čtyřúhelník $EFGH$ můžeme do daného čtverce $ABCD$ umístit třemi způsoby:

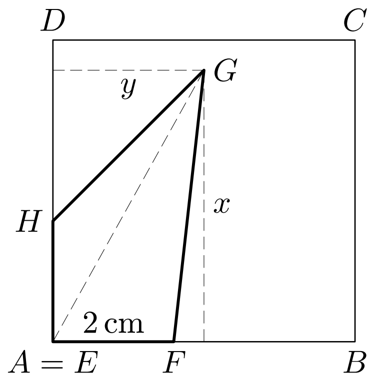
1. Dvě strany délky 2 cm leží na protilehlých stranách daného čtverce (obr. 1). Obsah každého takového čtyřúhelníku (rovnoběžníku) je $S = 5 \cdot 2\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2$.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

2. Obě strany délky 2 cm leží na sousedních stranách daného čtverce a přitom jsou protilehlými stranami čtyřúhelníku $EFGH$ (obr. 2). Obsah takového čtyřúhelníku je

$$S = \frac{1}{2}|EF| \cdot |AG| + \frac{1}{2}|GH| \cdot |AE| =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot |AG| + \frac{1}{2} \cdot 2\,\text{cm} \cdot |AE| \leqq \big(5 + (5 - 2)\big)\,\text{cm}^2 = 8\,\text{cm}^2 < 10\,\text{cm}^2.$$

3. Obě strany délky 2 cm leží na sousedních stranách daného čtverce a přitom jsou sousedními stranami čtyřúhelníku $EFGH$ (obr. 3). Označíme-li po řadě x a y vzdálenosti bodu G od stran AB a AD (tedy výšku trojúhelníku EFG na stranu EF a výšku trojúhelníku EHG na stranu EH), je obsah takového čtyřúhelníku

$$S = \frac{1}{2}|EF| \cdot x + \frac{1}{2}|AH| \cdot y \leqq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Přitom rovnost nastane, právě když $x = y = 5\,\mathrm{cm}$, tj. právě když $G = C$.

Závěr: Největší možný obsah ($10\,\mathrm{cm}^2$) mají všechny rovnoběžníky, jejichž dvě strany délky 2 cm leží na protějších stranách daného čtverce, a čtyři deltoidy, jejichž jedna úhlopříčka je zároveň úhlopříčkou daného čtverce.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při postupu řešení analogickém uvedenému oceňte každou ze tří možností 2 body. Bod strhněte při absenci jasného závěru.

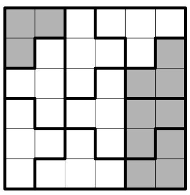
3. Předpokládejme, že čtverec o straně 6 jednotek je vydlaždičkován a dlaždičkami A a b dlaždičkami B (nevylučujeme případ, že $a = 0$ nebo $b = 0$). Pro obsah vydlaždičkované plochy pak platí rovnost $36 = 3a + 4b$, ze které plyne, že číslo a je násobkem čtyř (a číslo b násobkem tří). Proto má rovnice $36 = 3a + 4b$ v oboru celých nezáporných čísel za řešení pouze tyto dvojice (a, b): $(0, 9)$, $(4, 6)$, $(8, 3)$ a $(12, 0)$. Posoudíme dále, zda pro jednotlivé dvojice (a, b) je příslušné vydlaždičkování daného čtverce možné.

(i) 9 dlaždiček B. Vysvětlíme, proč takové vydlaždičkování neexistuje. Obarvěme jednotkové čtverečky celého čtverce jako obvyklou šachovnici; získáme 18 černých a 18 bílých „polí“. Každá dlaždička B pokrývá tři pole jedné barvy a jedno pole druhé barvy. Připusťme, že celý čtverec pokrývá 9 dlaždiček B, přitom právě x z nich má tu vlastnost, že pokrývají po 3 černých polích, takže $9 - x$ z nich má tu vlastnost, že pokrývají po 1 černém poli. Pro celkový počet černých polí pak platí rovnost $18 = 3x + (9 - x)$, odkud $x = 9/2$, což je spor.

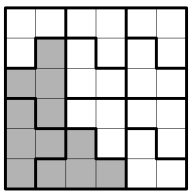
(ii) 4 dlaždičky A a 6 dlaždiček B. Možné řešení vidíte na obr. 4.

(iii) 8 dlaždiček A a 3 dlaždičky B. Možné řešení vidíte na obr. 5.

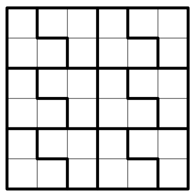
(iv) 12 dlaždiček A. Možné řešení vidíte na obr. 6.



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Poznámka. Uveďme ještě jiný argument, proč nelze devíti dlaždičkami B vyplnit uvažovaný čtverec. Dlaždička, která pokrývá rohové pole, může být umístěna (až na souměrnost podle úhlopříčky čtverce) jediným způsobem, např. tak jako dlaždička B v levém dolním rohu čtverce na obr. 5, pak ale dlaždička B, která v takovém případě pokrývá druhé pole zleva v dolní řadě, musí byt v poloze jako na obrázku. Poslední dvě pole dolní řady pak už jednou ani dvěma dlaždičkami B pokrýt nelze.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za sestavení rovnice $36 = 3a + 4b$, 1 bod za nalezení všech čtyř jejích řešení (a, b), konečně po 1 bodu udělte za správné posouzení jednotlivých případů.