53. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie A

1. Určete počet všech pětimístných palindromů, které jsou dělitelné číslem 37. (Palindromem nazýváme číslo, jehož zápis v desítkové soustavě se čte zepředu stejně jako zezadu.)

2. Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova“ délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani trojici AAA po sobě jdoucích písmen A, ani dvojici BB po sobě jdoucích písmen B. Určete, pro která přirozená čísla n platí, že obě čísla p_n a p_{n+1} jsou sudá.

3. Nechť K je libovolný vnitřní bod strany AB daného trojúhelníku ABC. Přímka CK protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnici opsanou trojúhelníku AKL a k_2 kružnici opsanou trojúhelníku BKL.

a) Dokažte, že přímka AC je tečna kružnice k_1, právě když přímka BC je tečna kružnice k_2.

b) Předpokládejme, že přímka AC je sečna kružnice k_1. Nechť P ($P \neq A$) je průsečík přímky AC s kružnicí k_1 a Q ($Q \neq B$) průsečík přímky BC s kružnicí k_2. Dokažte, že bod K leží na úsečce PQ.

4. Nechť K, L, M jsou po řadě průsečíky os vnitřních úhlů α, β, γ při vrcholech A, B, C daného trojúhelníku ABC s protějšími stranami BC, CA, AB. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2} \geqq 3.$$

II. kolo kategorie A se koná

v úterý 13. ledna 2004

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Každý pětimístný palindrom p se dá zapsat ve tvaru $p = \overline{abcba}$, kde a, b, c jsou číslice v desítkové soustavě, $a \neq 0$. Z vyjádření

$$p = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 37(270a + 27b + 3c) + 11(a + b - c)$$

plyne, že p je dělitelné číslem 37, právě když je číslem 37 dělitelné číslo $a+b-c$. Vzhledem k tomu, že a, b, c jsou číslice ($a \neq 0$), je $-8 \leqq a + b - c \leqq 18$. Proto je číslo $a + b - c$ dělitelné 37, právě když $a + b - c = 0$, neboli $c = a + b$. Číslice a, b tedy musejí splňovat podmínku $a + b \leqq 9$.

Ke každému $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ lze číslici b zvolit $10 - a$ způsoby tak, aby platilo $a + b \leqq 9$ ($b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9 - a\}$). Číslice c je pak určena jednoznačně jako součet $a + b$. Palindromů s číslicí $a = 1$ je proto 9, palindromů s číslicí $a = 2$ je 8 atd.; konečně pro číslici $a = 9$ existuje právě jeden palindrom.

Počet všech pětimístných palindromů, které jsou dělitelné číslem 37, je tedy

$$9 + 8 + 7 + \ldots + 1 = 45.$$

Za úplné řešení je 6 bodů, za nalezení podmínky $c = a + b$ udělte 4 body.

2. Počet vyhovujících slov délky $n \geqq 2$, která končí dvojicemi písmen AA, AB, BA označme postupně $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$; počet vyhovujících slov délky $n \geqq 1$, která končí písmenem A, resp. B, označme a_n, resp. b_n. Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 2$ platí:

$$\begin{aligned} a_n &= (aa)_n + (ba)_n, \\ b_n &= (ab)_n, \\ p_n &= a_n + b_n = (aa)_n + (ba)_n + (ab)_n. \end{aligned}$$

Existují právě dvě vyhovující slova délky jedna, a to slova A a B, a právě tři vyhovující slova délky dva, a to slova AA, AB, BA, proto $a_1 = b_1 = 1$, $p_1 = 2$, $(aa)_2 = (ab)_2 = (ba)_2 = 1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $p_2 = 3$.

Každé vyhovující slovo délky $n \geqq 3$, které končí dvojicí písmen AA, dostaneme tak, že připíšeme písmeno A na konec slova délky $n - 1$ končícího dvojicí BA. Proto platí

$$(aa)_n = (ba)_{n-1}.$$

Analogicky zjistíme, že pro každé $n \geqq 3$ platí rovněž vztahy

$$\begin{aligned} (ba)_n &= (ab)_{n-1}, \\ (ab)_n &= (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1}. \end{aligned}$$

Protože nás zajímá pouze parita přirozeného čísla p_n a výrazů, pomocí kterých ho počítáme, můžeme na základě uvedených rovností sestavit tabulku ze symbolů S a L, jimž odpovídají sudá resp. lichá čísla. Dostaneme

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
$(aa)_n$		L	L	L	S	S	L	S	L	…
$(ba)_n$		L	L	S	S	L	S	L	L	…
$(ab)_n$		L	S	S	L	S	L	L	L	…
a_n	L	S	S	L	S	L	L	L	S	…
b_n	L	L	S	S	L	S	L	L	L	…
p_n	S	L	S	L	L	L	S	S	L	…

Tato tabulka je nutně periodická, protože existuje jen osm různých uspořádaných trojic písmen S a L, takže nejdéle po osmi sloupcích se vzhledem k dokázané rekurenci začnou hodnoty posloupností $((aa)_n)$, $((ba)_n)$, $((ab)_n)$ opakovat. Hodnoty posloupností (a_n), (b_n), (p_n) jsou z nich odvozeny, takže se začnou opakovat rovněž. Z tabulky vidíme, že její perioda je 7 (první dva shodné sloupce jsou pro $n = 2$ a $n = 9$). A protože v příslušném úseku tabulky je dvojice sousedních sudých čísel p_7, p_8 jediná, jsou obě čísla p_n a p_{n+1} sudá, právě když je číslo n dělitelné sedmi.

Poznámka 1. Z výše uvedených vztahů můžeme odvodit rekurentní rovnice pro čísla a_n a b_n. Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 4$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= (aa)_n + (ba)_n = (ba)_{n-1} + (ab)_{n-1} = (ab)_{n-2} + (ab)_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-1},\\ b_n &= (ab)_n = (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1} = a_{n-1}. \end{aligned}$$

Tyto rovnice také můžeme odvodit následující úvahou. Vyhovující slovo končící písmenem A má koncovku BA nebo BAA, počet slov prvního typu je b_{n-1}, slov druhého typu je b_{n-2}. Vyhovující slovo končící písmenem B má nutně koncovku AB a těchto slov je a_{n-1}.

Poznámka 2. Ze vztahů uvedených v poznámce 1 se dá odvodit rekurentní rovnice přímo pro čísla p_n. Pro každé $n \geqq 4$ totiž platí

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-3},\\ b_n &= a_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-3}. \end{aligned}$$

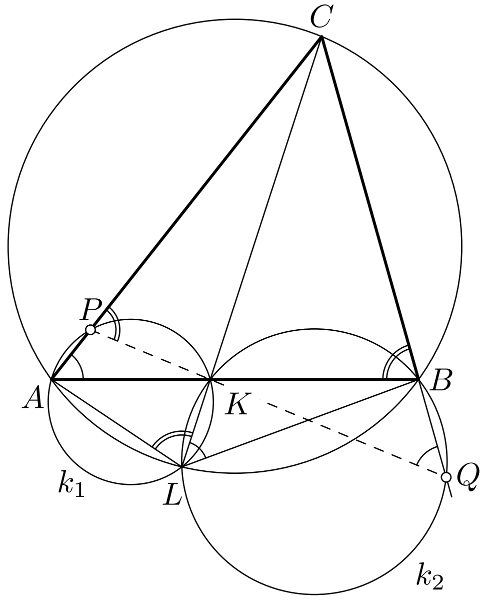
Vzhledem k tomu, že $p_n = a_n + b_n$, dostaneme sečtením těchto vztahů rovnici

$$p_n = p_{n-2} + p_{n-3},$$

kterou můžeme odvodit i takto: Každé vyhovující slovo délky n má právě jednu z koncovek $ABAA$, ABA, BAB, $BAAB$, přitom koncovky ABA a BAB má právě p_{n-2} slov, zatímco koncovky $ABAA$ a $BAAB$ má právě p_{n-3} slov.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za jakýkoli úplný systém rovnic, který umožňuje rekurentní výpočet čísel p_n, udělte 4 body.

3. a) V tětivovém čtyřúhelníku $ALBC$ platí $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BLC|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ALC|$ (obr. 1). Z rovnosti obvodového a příslušného úsekového úhlu pro tětivu AK v kružnici k_1 vyplývá, že přímka AC je tečnou ke kružnici k_1, právě když platí $|\sphericalangle CAK| = |\sphericalangle ALK|$, tj. právě když $\alpha = \beta$. Z analogických důvodů je přímka BC tečnou ke kružnici k_2, právě když $\beta = \alpha$. Přímka AC je proto tečnou ke kružnici k_1, právě když přímka BC je tečnou ke kružnici k_2, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 1

b) Podle části a) víme, že platí $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BLK|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ALK|$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí $\alpha < \beta$. Tečna v bodě A ke kružnici k_1 svírá s tětivou AK úsekový úhel $\beta > \alpha$, proto leží bod P na polopřímce AC, zatímco bod Q leží analogicky na polopřímce opačné k BC. Z tětivových čtyřúhelníků $ALKP$ a $BQLK$ plynou rovnosti $|\sphericalangle KPC| = \beta$ a $|\sphericalangle BQK| = \alpha$ (obr. 1). Trojúhelníky APK a QBK se proto shodují ve dvou úhlech (u vrcholů A, Q a P, B). Shodují se tedy i v úhlu při společném vrcholu K:

$$|\sphericalangle AKP| = |\sphericalangle BKQ| \ (= \beta - \alpha).$$

Odtud plyne, že body P, K, Q leží na téže přímce. Tím je tvrzení části b) dokázáno.

Poznámka. Dokázali jsme vlastně následující tvrzení: Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný s rameny AC, BC, dotýkají se obě ramena odpovídajících kružnic k_1 a k_2 ve vrcholech A a B, a není-li rovnoramenný, protínají jeho strany AC a BC odpovídající kružnice k_1 a k_2 v dalších bodech P a Q ($P \neq A$, $Q \neq B$), přičemž jejich spojnice PQ prochází daným bodem K.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za část a) nejvýše 2 body a za část b) nejvýše 4 body.

4. Užitím sinové věty v trojúhelnících BKA a CKA dostaneme

$$\frac{|BK|}{|AK|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta} \qquad \text{a} \qquad \frac{|CK|}{|AK|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\gamma}.$$

Sečtením obou předešlých rovností vyjde

$$\frac{|BC|}{|AK|} = \frac{|BK|}{|AK|} + \frac{|CK|}{|AK|} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Vynásobíme-li obě strany poslední rovnosti výrazem $2\cos\frac{\alpha}{2}$, obdržíme po úpravě

$$2\,\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right). \tag{1}$$

Cyklickou záměnou získáme další dvě analogické rovnosti

$$2\,\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2} = \sin\beta\left(\frac{1}{\sin\gamma} + \frac{1}{\sin\alpha}\right), \tag{2}$$

$$2\,\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right). \tag{3}$$

Sečtením rovností (1), (2) a (3) dostaneme po dělení dvěma rovnost

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ jsou kladná čísla, můžeme každý ze tří výrazů v závorkách na pravé straně poslední rovnosti odhadnout zdola číslem dvě (využíváme známou nerovnost $a/b + b/a \geqq 2$, která je pro libovolná kladná čísla a, b ekvivalentní se zřejmou nerovností $(a-b)^2 \geqq 0$). Odtud plyne požadovaná nerovnost. Tím je důkaz hotov.

Za úplné řešení je 6 bodů. Pokud řešitel dospěje ke vhodnému vyjádření hodnoty výrazu na levé straně, ale nedokáže jeho dolní odhad, udělte nejvýše 3 body. Nerovnost $a/b + b/a \geqq 2$ lze považovat za natolik známou, že může být použita bez důkazu.