53. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie B

1. Číslo a_n vznikne tak, že za sebe zapíšeme prvních n druhých mocnin po sobě jdoucích přirozených čísel. Například $a_{11} = 149\,162\,536\,496\,481\,100\,121$. Zjistěte, kolik čísel dělitelných dvanácti je mezi čísly $a_1, a_2, \dots, a_{100\,000}$.
2. Najděte všechny kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ takové, že pokud libovolný z koeficientů a, b, c zvětšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, který bude mít dvojnásobný kořen.
3. Pro dané přirozené číslo n řešte v oboru kladných reálných čísel rovnici

$$\left\lfloor x\sqrt{n^2-1} \right\rfloor = nx - 1.$$

(Symbol $\lfloor r \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo r.)

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník VBA. Sestrojte tečnový čtyřúhelník $ABCD$ s minimálním obsahem tak, aby jeho vrcholy C a D ležely po řadě na polopřímkách opačných k polopřímkám BV a AV.

II. kolo kategorie B se koná

v úterý 23. března 2004

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Jak víme, každé přirozené číslo k dává při dělení třemi stejný zbytek jako číslo $S(k)$ rovné součtu číslic původního čísla k. Číslo a_n proto dává při dělení třemi stejný zbytek jako součet $S(1^2)+S(2^2)+\ldots+S(n^2)$, tedy rovněž jako součet $1^2+2^2+\ldots+n^2$. *Dvěma způsoby* ukážeme, že poslední součet je dělitelný třemi, právě když číslo n je tvaru $9k-5$, $9k-1$ nebo $9k$, kde k je přirozené číslo.

Při *prvním způsobu* využijeme známý vzorec

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{1}$$

z něhož plyne, že zkoumaný součet je dělitelný třemi, právě když je součin $n(n+1)(2n+1)$ dělitelný devíti. Protože čísla n, $n+1$ a $2n+1$ jsou navzájem nesoudělná, hledáme právě ta n, pro která je dělitelné devíti jedno z čísel n, $n+1$ nebo $2n+1$, a to jsou po řadě čísla tvaru $9k$, $9k-1$, $9k-5$.

Druhý způsob je založen na pozorování, že zbytky čísel 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ... při dělení třemi jsou $1,1,0,1,1,0,\ldots$, tedy opakují se s periodou 3. Skutečně, čísla $(k+3)^2$ a k^2 dávají stejný zbytek při dělení třemi, neboť jejich rozdíl je číslo $3(2k+3)$, což je násobek tří. Sčítáním uvedených zbytků dostaneme postupně zbytky prvních devíti součtů (1): 1, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 0; poté se zbytky dalších součtů (1) začnou periodicky opakovat. (Plyne to z toho, že předchozí součet devíti čísel dává nulový zbytek a zároveň je počet sčítanců násobkem periody 3 sčítaných zbytků.)

Víme již, která čísla a_n jsou dělitelná třemi; posoudíme nyní snazší otázku, která a_n jsou dělitelná čtyřmi. Ukažme, že to jsou všechna a_n se sudým $n>2$ (a žádná jiná). Číslo a_n s lichým n je totiž liché, číslo a_2 se rovná 14 a číslo a_n se sudým $n>2$ končí stejným dvojčíslím jako číslo n^2, takže je takové a_n (stejně jako zmíněné dvojčíslí) dělitelné čtyřmi.

Spojíme-li výsledky o dělitelnosti třemi a čtyřmi dohromady, dojdeme k zjištění, že číslo a_n je dělitelné dvanácti, právě když je číslo n jednoho z tvarů $18k-14$, $18k-10$ nebo $18k$, kde k je libovolné přirozené číslo. Protože $100\,000 = 5\,556 \times 18 - 8$, je mezi přirozenými čísly od 1 do 100 000 právě 5 556 čísel $18k-14$, 5 556 čísel $18k-10$ a 5 555 čísel $18k$, dohromady je to 16 667 čísel.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body resp. 1 bod za vyřešení otázky, pro která n je číslo a_n dělitelné třemi resp. čtyřmi.

2. Pro koeficient a musí platit $a \neq 0$ a $a \neq -1$, aby všechny uvažované trojčleny byly skutečně kvadratické trojčleny. Jak víme, kvadratický trojčlen má dvojnásobný kořen, právě když je jeho diskriminant nulový. Sestavme proto diskriminanty všech tří trojčlenů se zvětšenými koeficienty:

$$\begin{aligned}
(a+1)x^2+bc+c &\quad \text{má diskriminant} \quad D_1=b^2-4(a+1)c,\\
ax^2+(b+1)x+c &\quad \text{má diskriminant} \quad D_2=(b+1)^2-4ac,\\
ax^2+bx+(c+1) &\quad \text{má diskriminant} \quad D_3=b^2-4a(c+1).
\end{aligned}$$

Hledáme tedy reálná čísla a, b, c, pro která platí $a \neq 0$, $a \neq -1$ a $D_1=D_2=D_3=0$.

Z rovnosti $D_1 = D_3$ plyne $c = a$, takže $D_2 = (b+1)^2 - 4a^2 = (b+1-2a)(b+1+2a)$; rovnost $D_2 = 0$ pak znamená, že platí $b = \pm 2a - 1$, a proto $D_1 = (\pm 2a - 1)^2 - 4(a+1)a = 4a^2 \mp 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1 \mp 4a - 4a$, tudíž $D_1 = -8a + 1$ nebo $D_1 = 1$. Proto z rovnosti $D_1 = 0$ plyne $a = 1/8$, $b = 2a - 1 = -3/4$ a $c = a = 1/8$ (zkouška je snadná, není však nutná, naším postupem totiž máme zaručeny rovnosti $D_1 = D_3$, $D_2 = 0$ a $D_1 = 0$).

Odpověď: Úloze vyhovuje jediný trojčlen $\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za správné sestavení diskriminantů D_1, D_2, D_3. Za opomenutí podmínek $a \neq 0$, $a \neq -1$ v jinak úplném řešení strhněte 1 bod.

3. Kladné číslo x je řešením rovnice s daným n, právě když je číslo nx přirozené a jsou splněny nerovnosti

$$nx - 1 \leqq x\sqrt{n^2 - 1} < nx.$$

Pravá nerovnost je splněna pro každé $x > 0$, neboť zřejmě platí $\sqrt{n^2-1} < \sqrt{n^2} = n$. Zbývá tedy vyřešit levou nerovnici (vzhledem k neznámé x). Po jednoduché úpravě dostáváme

$$x\left(n - \sqrt{n^2 - 1}\right) \leqq 1,$$
$$x \leqq \frac{1}{n - \sqrt{n^2 - 1}} = n + \sqrt{n^2 - 1}.$$

Využili jsme toho, že výraz $n - \sqrt{n^2 - 1}$ je kladný a v součinu se sdruženým výrazem $n + \sqrt{n^2 - 1}$ dává číslo 1. Po vynásobení obou stran odvozené nerovnosti číslem n dostaneme pro přirozené číslo $k = nx$ ekvivalentní podmínku

$$k \leqq n^2 + n\sqrt{n^2 - 1},$$

která je splněna právě pro $k \in \{1, 2, \dots, 2n^2 - 1\}$, neboť pro druhý sčítanec z pravé strany poslední nerovnosti zřejmě platí celočíselné odhady

$$n^2 - 1 \leqq n\sqrt{n^2 - 1} < n^2$$

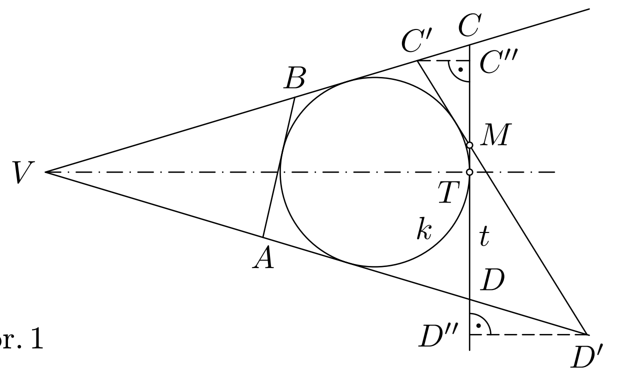
(znovu využíváme pouze nerovnost $\sqrt{n^2 - 1} < n$). Všechna řešení dané rovnice jsou tvaru $x = k/n$ a tvoří tak množinu zlomků

$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2n^2 - 1}{n}\right\}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za odvození nerovnosti $x \leqq n + \sqrt{n^2 - 1}$. Za povšimnutí, že každé řešení x musí být tvaru zlomku k/n, udělte 1 bod.

4. Kružnice vepsaná hledanému čtyřúhelníku je kružnicí k připsanou straně AB trojúhelníku BAV. Ten ze dvou průsečíků osy úhlu AVB s kružnicí k, který je dál od vrcholu V, označme T (obr. 1). Hledané body C a D nalezneme jako průsečíky tečny t

v bodě T ke kružnici k po řadě s přímkami VB, VA. Dokažme, že takto sestrojený čtyřúhelník má ze všech čtyřúhelníků vyhovujících podmínkám úlohy nejmenší obsah.



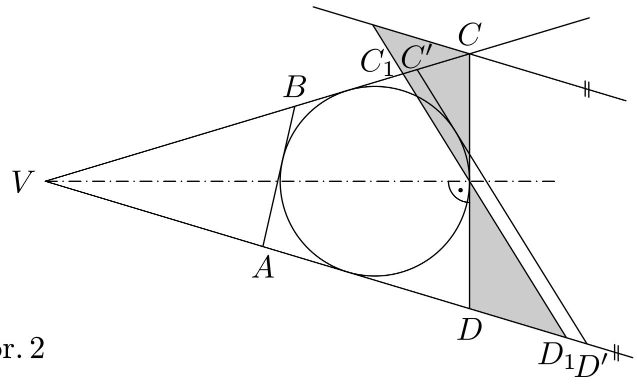
Obr. 1

Označme C', D' vrcholy jiného tečnového čtyřúhelníku s vepsanou kružnicí k (přímka $C'D'$ je tečnou kružnice k). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že průsečík M tečen t a $C'D'$ leží uvnitř úsečky TC. To znamená, že platí $|MD| > |MC|$ (obr. 1). Označme C'' a D'' odpovídající paty kolmic spuštěných z bodů C' a D' na přímku t; bod C'' leží uvnitř úsečky MC a D'' na polopřímce MD vně úsečky MD, takže $|MC''| < |MC| < |MD| < |MD''|$ a z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $MC'C''$ a $MD'D''$ plyne $|C'C''| < |D'D''|$. Trojúhelník DMD' má tudíž větší obsah než trojúhelník CMC'. Rozdíl jejich obsahů je však roven rozdílu obsahů čtyřúhelníků $ABC'D'$ a $ABCD$, tedy obsah čtyřúhelníku $ABC'D'$ je větší než obsah čtyřúhelníku $ABCD$.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení označme C, D průsečíky tečny t připsané kružnice k s rameny úhlu VB, VA. Jsou-li C', D' vrcholy jiného tečnového čtyřúhelníku s vepsanou kružnicí k, platí pro obsahy tečnových čtyřúhelníků $ABCD$ a $ABC'D'$

$$S(ABCD) = S(VCD) - S(VAB), \qquad S(ABC'D') = S(VC'D') - S(VAB).$$

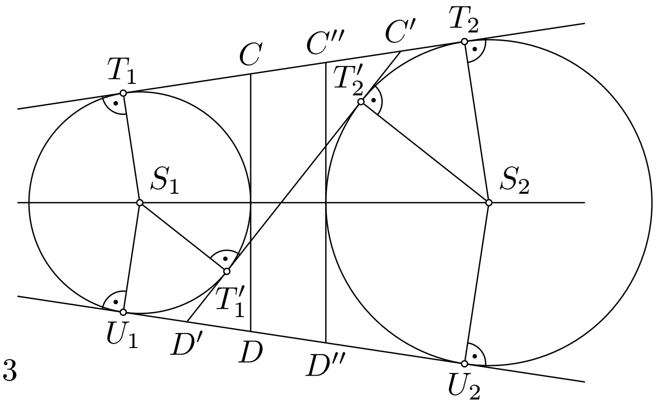
Stačí tedy ukázat, že pro libovolnou takovou tečnu $C'D'$, která není kolmá na osu úhlu AVB, platí $S(VC'D') > S(VCD)$. To je však zřejmé z obr. 2 (oba šedé trojúhelníky mají díky středové souměrnosti stejný obsah a přitom $S(VC'D') > S(VC_1D_1) > S(VCD)$).



Obr. 2

Jiné řešení. Obsah tečnového čtyřúhelníku $ABCD$, jehož vepsaná kružnice má poloměr r, je $S = \frac{1}{2}r(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) = \frac{1}{2}r(2|AB| + 2|CD|) = r(|AB| + |CD|)$.

Obsah tečnového čtyřúhelníku $ABCD$ splňujícího podmínky úlohy bude tedy nejmenší, právě když bude nejkratší úsečka CD.



Obr. 3

Uvažujme kružnici připsanou straně $C'D'$ trojúhelníku $VC'D'$ (obr. 3). Z vlastností tečen postupně nahlédneme, že je $|T_1C| = \frac{1}{2}|CD|$, $|T_2C''| = \frac{1}{2}|C''D''|$ a také $|C'D'| = |T_1T_2|$. Poslední rovnost plyne ze známých vlastností vepsané a připsané kružnice, totiž že jejich body dotyku na společnou stranu jsou souměrně sdružené podle středu strany; důkaz ovšem vyžaduje trochu počítání:

$$|T_1T_2| = |T_1C'| + |C'T_2| = |T_1'C'| + |C'T_2'| = |T_1'T_2'| + 2|T_2'C'|,$$
$$|U_1U_2| = |U_1D'| + |D'U_2| = |T_1'D'| + |D'T_2'| = |T_1'T_2'| + 2|T_1'D'|.$$

Ze souměrnosti podle osy úhlu AVB plyne $|T_1T_2| = |U_1U_2|$, takže $|T_2'C'| = |T_1'D'|$. Je tedy $|C'D'| = |T_1'T_2'| + 2|T_2'C'| = |T_1T_2|$.

Protože obě kružnice jsou odděleny společnou tečnou $C'D'$, nemohou se dotýkat, takže $|CD| < |C''D''|$, neboli $|CT_1| < |C''T_2|$. To znamená, že je

$$|CD| = 2|T_1C| < |T_1C| + |C''T_2| < |T_1T_2| = |C'D'|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za určení kružnice vepsané všem vyhovujícím čtyřúhelníkům $ABCD$, další 1 bod za uhodnutí polohy hledané tečny CD a 3 body za důkaz, že při jiné poloze CD je obsah $ABCD$ větší.