53. ročník matematické olympiády

Úlohy II. kola kategorie C

1. V rovině je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho straně BC existuje bod K a na straně CD bod L tak, že daný obdélník je úsečkami AK, KL a LA rozdělen na čtyři navzájem podobné trojúhelníky. Určete hodnotu poměru $a : b$.

2. Najděte všechny trojice prvočísel p, q a r, pro které platí

$$\frac{14}{p} + \frac{51}{q} = \frac{65}{r}.$$

3. Do kružnice o poloměru $r = 6$ vepište osmiúhelník $ABCDEFGH$, jehož strany AB, CD, EF a GH mají po řadě délky 3, 4, 5 a 6 a strany BC, DE, FG a HA jsou shodné.

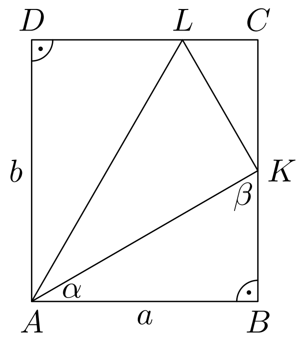
4. Žáci měli vypočítat příklad $x + y \cdot z$ pro trojmístné číslo x a dvojmístná čísla y a z. Martin umí násobit a sčítat čísla zapsaná v desítkové soustavě, zapomněl však na pravidlo o přednosti násobení před sčítáním. Proto mu sice vyšlo zajímavé číslo, které se čte stejně zleva doprava jako zprava doleva, správný výsledek byl ale o 2 004 menší. Určete čísla x, y a z.

II. kolo kategorie C se koná

v úterý 23. března 2004

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. V pravoúhlém trojúhelníku ABK označme $\alpha = |\sphericalangle BAK|$, $\beta = |\sphericalangle AKB| = 90° - \alpha$ (obr. 1). Stejné vnitřní úhly $90°$, α, β mají i trojúhelníky AKL a ADL, neboť jsou dle zadání



Obr. 1

trojúhelníku ABK podobné. Všimněme si jejich (ostrých) úhlů u společného vrcholu A. Protože $|\sphericalangle KAD| = 90° - \alpha = \beta$, jsou oba úhly KAL a LAD menší než β, takže se rovnají úhlu α. Pravý úhel BAD je tedy polopřímkami AK, AL rozdělen na tři shodné úhly velikosti α, odkud $\alpha = 30°$ (a $\beta = 60°$). Z pravoúhlých trojúhelníků ADL a ABK pak vyplývá, že $|AK| = |AB|/\cos 30° = 2a/\sqrt{3}$ a $|AL| = |AD|/\cos 30° = 2b/\sqrt{3}$. Odtud s ohledem na podmínku $a < b$ plyne nerovnost $|AK| < |AL|$, tudíž přeponou v trojúhelníku AKL je AL (delší z obou stran AK, AL). Pro poměr délek odvěsny AK a přepony AL pak platí $\cos 30° = |AK| : |AL| = a : b$, takže $a : b = \sqrt{3} : 2$.

Úlohu lze řešit mnoha obměněnými postupy, například rozlišit dva případy, kdy trojúhelník KAL má pravý úhel při vrcholu K respektive L, a v každém z nich vyjádřit vnitřní úhly všech čtyř podobných trojúhelníků (ve druhém případě pak ale vyjde $a : b = 2 : \sqrt{3} > 1$, což odporuje zadání úlohy).

Za úplné řešení udělte 6 bodů; 2 body za určení úhlů α, β, 2 body za výpočet poměru $a : b$, 2 body za výpočet či úvahu vylučující opačný poměr (tedy možnost $|\sphericalangle ALK| = 90°$).

2. Všimněme si nejdříve, že pro čitatele zlomků z dané rovnice platí vztah $14+51 = 65$. Proto je řešením každá trojice stejných prvočísel $p = q = r$ a navíc pro libovolné řešení platí: jsou-li některá dvě z čísel p, q, r stejná, je stejné i třetí číslo. Budeme tedy dále předpokládat, že prvočísla p, q, r splňující danou rovnici jsou navzájem různá (a tedy navzájem nesoudělná).

Po vynásobení rovnice součinem pqr dostaneme

$$14qr + 51pr = 65pq,$$

odkud vzhledem ke zmíněné nesoudělnosti plyne

$$p \mid 14 = 2 \cdot 7, \quad q \mid 51 = 3 \cdot 17 \quad \text{a} \quad r \mid 65 = 5 \cdot 13.$$

To znamená, že $p \in \{2, 7\}$, $q \in \{3, 17\}$ a $r \in \{5, 13\}$. Nyní můžeme sestavit a do rovnice dosadit všech osm možných trojic (p, q, r); zjistíme tak, že vyhovuje jedině trojice $(7, 17, 13)$.

Prověrku dosazováním můžeme zkrátit tak, že vyloučíme kteroukoliv z hodnot $p = 2$, $q = 3$, resp. $r = 5$. Například po dosazení $r = 5$ dostaneme po vydělení pěti rovnici $14q + 51p = 13pq$, která nemá celočíselné řešení p ani pro $q = 3$ $(14 + 17p = 13p)$, ani pro $q = 17$ $(14 + 3p = 13p)$. Jiná možnost: z rovnice $14qr + 51pr = 65pq$ plyne $2p(q - r) = 7(2qr + 7pr - 9pq)$, takže součin $p(q - r)$ je dělitelný sedmi. Protože však $q \in \{3, 17\}$ a $r \in \{5, 13\}$ (viz výše), není rozdíl $q - r$ dělitelný sedmi, proto je sedmi dělitelné číslo p. Podobně lze zdůvodnit, proč $17 \mid q$ a $13 \mid r$.

Jiné řešení. Z dané rovnice vyjádříme r pomocí p a q:

$$r = \frac{65pq}{51p + 14q} = \frac{5 \cdot 13 \cdot p \cdot q}{51p + 14q}.$$

V posledním zlomku jsme zvýraznili rozklad čitatele na (čtyři) prvočinitele. Takový zlomek bude roven některému prvočíslu r, právě když jeho jmenovatel bude součinem tří prvočinitelů z čitatele (jiné krácení zlomku není možné). Hledáme tedy situace, kdy platí některý z případů

$$\begin{aligned} 51p + 14q &= 5 \cdot 13 \cdot p \quad \text{a} \quad r = q, \\ 51p + 14q &= 5 \cdot 13 \cdot q \quad \text{a} \quad r = p, \\ 51p + 14q &= 5 \cdot p \cdot q \quad \text{a} \quad r = 13, \\ 51p + 14q &= 13 \cdot p \cdot q \quad \text{a} \quad r = 5. \end{aligned}$$

Snadnou úpravou rovnic zjistíme, že první dva případy nastanou pouze v situaci, kdy $p = q$ (tehdy ovšem rovněž $p = r$). Poslední dva případy vedou k vyjádřením

$$q = \frac{3 \cdot 17 \cdot p}{5p - 14}, \quad \text{resp.} \quad q = \frac{3 \cdot 17 \cdot p}{13p - 14},$$

ze kterých analogickou úvahou o krácení zlomků (případ $p = q$ již můžeme vynechat) s přihlédnutím k zřejmým nerovnostem $5p - 14 < 17p$ a $13p - 14 < 17p$ dostaneme rovnice

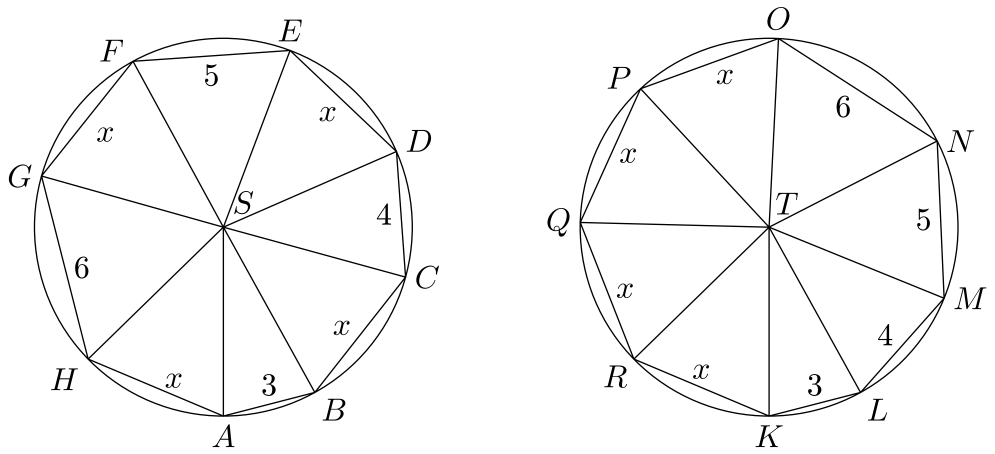
$$5p - 14 = 3p, \quad \text{resp.} \quad 13p - 14 = 3p.$$

První rovnice má řešení $p = 7$ (kterému odpovídá $q = 17$ a $r = 13$), druhá rovnice celočíselné řešení nemá.

Odpověď: Všechna řešení (p, q, r) jsou trojice (p, p, p), kde p je libovolné prvočíslo, a trojice $(7, 17, 13)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů; 2 body za nalezení řešení (p, p, p), 1 bod za nalezení řešení $(7, 17, 13)$ a 1 až 3 body (podle úplnosti úvah) za zdůvodnění, že jiná řešení neexistují (půjde především o úvahy o dělitelnosti).

3. *Rozbor*: Kromě hledaného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ uvážíme ještě pomocný osmiúhelník $KLMNOPQR$, který je rovněž vepsán do kružnice o poloměru $r = 6$ a jehož strany splňují podmínky: $|KL| = 3$, $|LM| = 4$, $|MN| = 5$, $|NO| = 6$, $|OP| = |PQ| = |QR| = |RK|$ (obr. 2). Označme S, resp. T střed kružnice s vepsaným osmiúhelníkem



Obr. 2

$ABCDEFGH$, resp. $KLMNOPQR$. Podle věty *sss* platí shodnosti $\Delta ABS \simeq \Delta KLT$, $\Delta CDS \simeq \Delta LMT$, $\Delta EFS \simeq \Delta MNT$, $\Delta GHS \simeq \Delta NOT$, a proto jsou shodné středové úhly ASB a KTL, CSD a LTM, ESF a MTN, GSH a NTO. Dále podle věty *sss* jsou shodné trojúhelníky BCS, DES, FGS a HAS, stejně jako trojúhelníky OPT, PQT, QRT a RKT. Ze shodnosti jejich úhlů při hlavním vrcholu S, resp. T proto plyne

$$|\sphericalangle BSC| = \frac{360^\circ - |\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle CSD| - |\sphericalangle ESF| - |\sphericalangle GSH|}{4} =$$
$$= \frac{360^\circ - |\sphericalangle KTL| - |\sphericalangle LTM| - |\sphericalangle MTN| - |\sphericalangle NTO|}{4} = |\sphericalangle OTP|.$$

Využili jsme toho, že středy S a T jsou *vnitřními* body obou osmiúhelníků (tudíž součet všech osmi středových úhlů je v obou případech 360°), neboť v opačném případě by jeden z osmi středových úhlů byl roven součtu sedmi ostatních; musel by to být úhel příslušný tětivě délky 6, ten je však zřejmě menší než součet úhlů příslušných tětivám délek 3, 4 a 5. Trojúhelníky BCS a OPT jsou proto shodné podle věty *sus*, tudíž čtveřice shodných stran obou osmiúhelníků mají jednu společnou délku. Dokážeme-li proto sestrojit pomocný osmiúhelník $KLMNOPQR$, je konstrukce osmiúhelníku $ABCDEFGH$ nasnadě.

Konstrukce: Na libovolné kružnici $t(T; 6)$ sestrojíme v jednom směru body K, L, M, N a O tak, aby $|KL| = 3$, $|LM| = 4$, $|MN| = 5$ a $|NO| = 6$. Úhel KTO (ten, který neobsahuje body L, M, N) pak rozdělíme na čtyři shodné díly: nejprve sestrojíme průsečík Q kružnice t s osou úhlu KTO, pak průsečíky P, R kružnice t s osami úhlů OTQ resp. QTK. Poté přistoupíme ke konstrukci hledaného osmiúhelníku $ABCDEFGH$: na kružnici $k(S, 6)$ zvolíme bod A a pak na ní v jednom směru sestrojíme postupně body B, C, ..., H tak, aby $|AB| = 3$, $|BC| = |OP|$, $|CD| = 4$, $|DE| = |OP|$, $|EF| = 5$, $|FG| = |OP|$, $|GH| = 6$.

Důkaz správnosti: Ze shodnosti sedmi dvojic trojúhelníků $\Delta ABS \simeq \Delta KLT$, $\Delta BCS \simeq \simeq \Delta OPT, \dots, \Delta GHS \simeq \Delta NOT$ plyne shodnost úhlů HSA a RTK, a tedy i shodnost osmé dvojice trojúhelníků $\Delta HAS \simeq \Delta RKT$. Proto mají délky stran sestrojeného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ (shodné se stranami $KLMNOPQR$) všechny potřebné vlastnosti.

Poznámka: O čtyřúhelníku $KLMNOPQR$ jsme nemuseli v celém řešení vůbec mluvit a vést úvahy takto: úhly shodné se středovými úhly ASB, CSD, ESF, GSH dokážeme sestrojit, pro společnou velikost ω shodných středových úhlů BSC, DSE, FSG a HSA pak platí rovnice

$$4\omega + |\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle CSD| + |\sphericalangle ESF| + |\sphericalangle GSH| = 360^\circ, \tag{1}$$

kterou lze snadno konstrukčně vyřešit; osmiúhelník $KLMNOPQR$ je ovšem k tomuto účelu ideální pomůckou.

Za sestavení rovnice (1) nebo nápad s pomocným osmiúhelníkem udělte 3 body (z toho 1 bod za správná odůvodnění potřebných shodností úhlů a trojúhelníků pomocí vět *sss* či *sus*), další 2 body za popis konstrukce řešení. Pokud v jinak úplném řešení chybí jakékoli zdůvodnění, že bod S je vnitřním bodem osmiúhelníku $ABCDEFGH$, strhněte 1 bod. Důkaz správnosti konstrukce (jež je zřejmá) není nutné uvádět.

4. Martin vypočítal hodnotu $(x+y)z$ místo $x+yz$, takže podle zadání platí

$$(x+y)z - (x+yz) = 2\,004, \quad \text{neboli} \quad x \cdot (z-1) = 2\,004 = 12 \cdot 167,$$

přičemž 167 je prvočíslo. Činitele x a $z-1$ určíme, když si uvědomíme, že z je dvojmístné číslo, takže $9 \leqq z-1 \leqq 98$. Vidíme, že nutně $z-1 = 12$ a $x = 167$, odkud $z = 13$. Martin tedy vypočítal číslo $V = (167+y) \cdot 13$. Číslo V je tedy čtyřmístné, a poněvadž se čte odpředu stejně jako odzadu, má tvar $\overline{abba} = 1\,001a + 110b$. Protože $1\,001 = 13 \cdot 77$, musí platit rovnost $(167+y) \cdot 13 = 13 \cdot 77a + 110b$, z níž plyne, že číslice b je dělitelná třinácti, takže $b = 0$. Po dosazení dostaneme (po dělení třinácti) rovnost $167 + y = 77a$, která s ohledem na nerovnosti $10 \leqq y \leqq 99$ znamená, že číslice a se rovná 3, tudíž $y = 64$.

V druhé části řešení jsme mohli postupovat rovněž následovně. Pro číslo $V = (167 + + y) \cdot 13$ vycházejí z nerovností $10 \leqq y \leqq 99$ odhady $2\,301 \leqq V \leqq 3\,458$. Zjistíme proto, která z čísel $\overline{2bb2}$, kde $b \in \{3,4,5,6,7,8,9\}$, a čísel $\overline{3bb3}$, kde $b \in \{0,1,2,3,4\}$, jsou dělitelná třinácti. I když lze těchto dvanáct čísel rychle otestovat na kalkulačce, udělejme to obecně jejich částečným vydělením třinácti:

$$\overline{2bb2} = 2\,002 + 110b = 13 \cdot (154 + 8b) + 6b,$$
$$\overline{3bb3} = 3\,003 + 110b = 13 \cdot (231 + 8b) + 6b.$$

Vidíme, že vyhovuje jedině číslo $\overline{3bb3}$ pro $b = 0$, kdy $167 + y = 231$, takže $y = 64$.

Odpověď: Žáci měli počítat příklad $167 + 64 \cdot 13$, tedy $x = 167$, $y = 64$ a $z = 13$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za sestavení rovnice $(x+y)z - (x+yz) = 2\,004$, 1 bod za její úpravu do součinového tvaru $x(z-1) = 2\,004$, 2 body za nalezení činitelů x a $z-1$ a 2 body za diskusi o dělitelnosti čísel $\overline{abba}$ číslem 13.