53. ročník matematické olympiády, III. kolo kategorie A

Přerov, 28.–31. března 2004

1. *Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro něž platí*

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 6 + \min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4},\ y^2 - \frac{8}{y^4},\ z^2 - \frac{8}{z^4}\right\}.$$

(J. Švrček)

Řešení. Vyhovuje-li nějaká trojice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $(xyz \neq 0)$ podmínkám úlohy, je řešením následující soustavy nerovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leqq 6 + x^2 - \frac{8}{x^4}, & & & \frac{8}{x^4} + y^2 + z^2 &\leqq 6,\\ x^2 + y^2 + z^2 &\leqq 6 + y^2 - \frac{8}{y^4}, & &\text{tj.} & x^2 + \frac{8}{y^4} + z^2 &\leqq 6,\\ x^2 + y^2 + z^2 &\leqq 6 + z^2 - \frac{8}{z^4}, & & & x^2 + y^2 + \frac{8}{x^4} &\leqq 6. \end{aligned}$$

Sečtením všech tří nerovnic této soustavy dostaneme nerovnici

$$\left(\frac{8}{x^4} + x^2 + x^2\right) + \left(\frac{8}{y^4} + y^2 + y^2\right) + \left(\frac{8}{z^4} + z^2 + z^2\right) \leqq 18.$$

Výrazy v každé ze tří závorek na levé straně lze odhadnout užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice kladných čísel. Obdržíme tak postupně

$$\begin{aligned} 18 &\geqq \left(\frac{8}{x^4} + x^2 + x^2\right) + \left(\frac{8}{y^4} + y^2 + y^2\right) + \left(\frac{8}{z^4} + z^2 + z^2\right) \geqq\\ &\geqq 3\sqrt[3]{\frac{8}{x^4}\cdot x^2\cdot x^2} + 3\sqrt[3]{\frac{8}{y^4}\cdot y^2\cdot y^2} + 3\sqrt[3]{\frac{8}{z^4}\cdot z^2\cdot z^2} = 18. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že v každé ze tří použitých nerovností mezi aritmetickým a geometrickým průměrem nastane rovnost, takže příslušná trojice čísel má vždy tři stejné složky. Musí tedy současně platit

$$\frac{8}{x^4} = x^2, \qquad \frac{8}{y^4} = y^2, \qquad \frac{8}{z^4} = z^2,$$

tj.

$$x^6 = y^6 = z^6 = 8.$$

Z poslední podmínky bezprostředně plyne

$$(x, y, z) = \left(\varepsilon_1\sqrt{2}, \varepsilon_2\sqrt{2}, \varepsilon_3\sqrt{2}\right), \quad \text{kde } \varepsilon_i \in \{-1; 1\} \text{ pro } i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Vzhledem k užité důsledkové úpravě je nutno provést zkoušku, pomocí níž zjistíme, že všech 8 trojic reálných čísel určených vztahem (1) vyhovuje podmínkám úlohy.

Jiné řešení. Nechť trojice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $(xyz \neq 0)$ je řešením dané úlohy. Označme

$$A = \min\{x^2, y^2, z^2\} > 0.$$

Potom platí

$$\min\left\{x^2 - \frac{8}{x^4}, y^2 - \frac{8}{y^4}, z^2 - \frac{8}{z^4}\right\} = A - \frac{8}{A^2}.$$

Proto též

$$A+A+A \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq 6+\min\left\{x^2-\frac{8}{x^4}, y^2-\frac{8}{y^4}, z^2-\frac{8}{z^4}\right\} = \\ = 6+A-\frac{8}{A^2}.$$

Po úpravě dostaneme nerovnost, jejíž pravou stranu odhadneme užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem:

$$6 \leqq A+A+\frac{8}{A^2} \leqq 3\sqrt[3]{A\cdot A\cdot\frac{8}{A^2}} = 6.$$

To znamená, že ve všech užitých nerovnostech musí nastat rovnost, proto

$$2 = A = x^2 = y^2 = z^2.$$

Zkouškou opět ověříme, že všechny trojice určené vztahem (1) jsou řešením zadané nerovnice.

---

2. *Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova“ délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani čtveřici $AAAA$ po sobě jdoucích písmen A, ani trojici BBB po sobě jdoucích písmen B. Určete hodnotu výrazu*

$$\frac{p_{2004}-p_{2002}-p_{1999}}{p_{2001}+p_{2000}}.$$

(R. Kučera)

Řešení. Počet vyhovujících slov délky n, která končí písmenem A, resp. B, označme a_n, resp. b_n. Platí

$$p_n = a_n + b_n. \tag{1}$$

Nechť $n \geqq 4$. Vyhovující slovo končící písmenem A má jednu z koncovek BA, BAA, nebo $BAAA$. Počet slov prvního typu je b_{n-1}, druhého typu b_{n-2}, třetího typu b_{n-3}. Proto

$$a_n = b_{n-1}+b_{n-2}+b_{n-3}. \tag{2}$$

Podobně pro $n \geqq 3$ má vyhovující slovo končící písmenem B jednu z koncovek AB, ABB, tudíž

$$b_n = a_{n-1}+a_{n-2}. \tag{3}$$

Nechť dále $n \geqq 6$; každé z čísel b_i ve vztahu (2) vyjádřeme pomocí (3), dostaneme tak

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1}+b_{n-2}+b_{n-3} = \\ &= (a_{n-2}+a_{n-3})+(a_{n-3}+a_{n-4})+(a_{n-4}+a_{n-5}) = \\ &= a_{n-2}+2a_{n-3}+2a_{n-4}+a_{n-5}. \end{aligned} \tag{4}$$

Podobně dostaneme

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1}+a_{n-2} = \\ &= (b_{n-2}+b_{n-3}+b_{n-4})+(b_{n-3}+b_{n-4}+b_{n-5}) = \\ &= b_{n-2}+2b_{n-3}+2b_{n-4}+b_{n-5}. \end{aligned} \tag{5}$$

Sečtením vztahů (4) a (5) dostaneme dle (1)

$$p_n = p_{n-2} + 2p_{n-3} + 2p_{n-4} + p_{n-5}.$$

Proto pro libovolné přirozené číslo $n \geqq 6$ platí

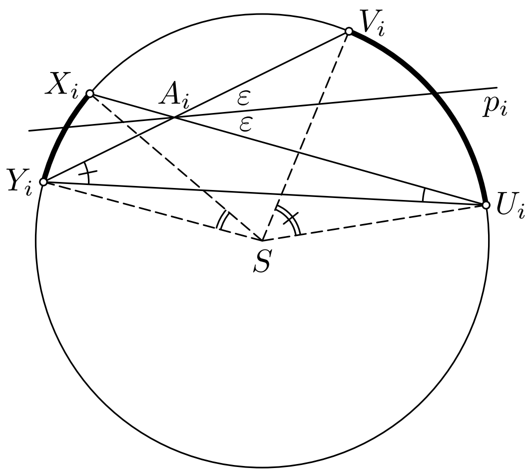
$$\frac{p_n - p_{n-2} - p_{n-5}}{p_{n-3} + p_{n-4}} = 2,$$

tudíž zadaný zlomek má hodnotu 2 i pro $n = 2004$.

---

3. *V rovině je dána kružnice k a 121 jejích sečen $p_1, p_2, \dots, p_{121}$. Uvnitř této kružnice je na každé přímce p_i dán bod A_i. Dokažte, že na kružnici k existuje bod X takový, že úsečka A_iX svírá s přímkou p_i úhel menší než $21°$ pro nejméně 29 různých indexů i.* *(J. Šimša)*

Řešení. Pro libovolné i, $1 \leqq i \leqq 121$, označme M_i množinu všech bodů X kružnice k, pro něž úsečka A_iX svírá s odpovídající přímkou p_i úhel velikosti menší než $\varepsilon = 21°$. Množina M_i je zřejmě tvořena dvěma oblouky X_iY_i a U_iV_i (obr. 1). Oběma uvažovaným obloukům kružnice k odpovídá dvojice středových úhlů X_iSY_i a U_iSV_i, kde S je střed dané kružnice k. Ukážeme, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, 121\}$ platí $|\sphericalangle X_iSY_i| + |\sphericalangle U_iSV_i| = 4\varepsilon = 84°$.



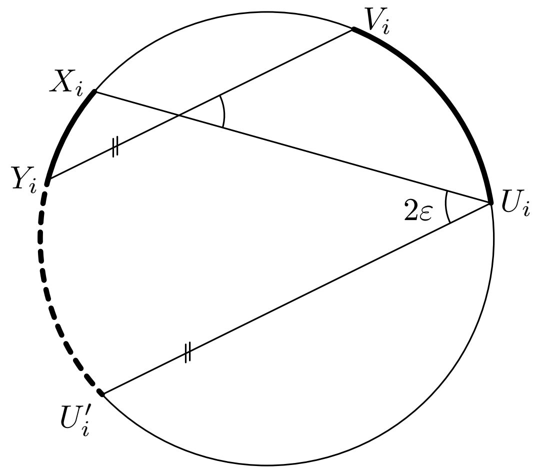
Obr. 1

V trojúhelníku $A_iY_iU_i$ je součet velikostí vnitřních úhlů při vrcholech Y_i a U_i roven velikosti vedlejšího úhlu při vrcholu A_i, tj. 2ε. Avšak součet obou uvažovaných vnitřních úhlů v trojúhelníku $A_iY_iU_i$ je roven součtu obvodových úhlů odpovídajících obloukům X_iY_i a U_iV_i. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem dostáváme

$$|\sphericalangle X_iSY_i| + |\sphericalangle U_iSV_i| = 2 \cdot 2\varepsilon = 4\varepsilon = 84°.$$

Celkově tak 121 uvažovaným tětivám p_i a jejich bodům A_i odpovídá 121 dvojic oblouků X_iY_i a U_iV_i kružnice k s celkovou obloukovou délkou $121 \cdot 84° = 10\,164°$. Pokud každý bod X kružnice k náleží nejvýše 28 množinám M_i, musí být uvedený součet všech obloukových délek nejvýše roven $28 \cdot 360° = 10\,080°$, což neplatí. Proto existuje aspoň jeden bod kružnice k, který náleží současně aspoň 29 množinám M_i, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Že oběma obloukům X_iY_i a U_iV_i odpovídá dohromady středový úhel 4ε, nahlédneme snadno i z obr. 2, neboť oblouky $U_i'Y_i$ a U_iV_i jsou shodné.



Obr. 2

---

4. *Zjistěte, pro která přirozená čísla n je součet*

$$\frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \ldots + \frac{n}{n!}$$

číslo celé. *(E. Kováč)*

Řešení. Pro $n = 1, 2, 3$ je daný součet roven celým číslům 1, 3, resp. 5. Předpokládejme proto dále, že $n > 3$. Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \ldots + \frac{n}{(n-2)!} + \frac{n}{(n-1)!} + \frac{n}{n!} =$$
$$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2 + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3 + \ldots + n(n-1) + n + 1}{(n-1)!}.$$

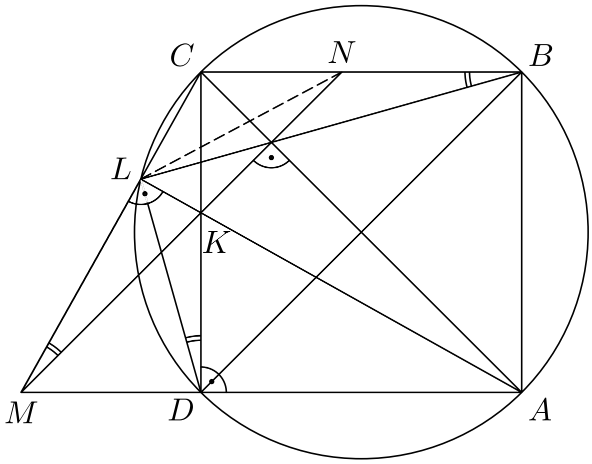
Je-li poslední zlomek celé číslo, je nutně číslo $n - 1$ dělitelem jeho čitatele. Proto je číslo $n - 1$ dělitelem čísla $n + 1$. Protože největší společný dělitel dvou čísel je dělitelem i jejich rozdílu, je největší společný dělitel čísel $n - 1$ a $n + 1$ dělitelem čísla 2, takže $n - 1 \in \{1, 2\}$, což je ve sporu s předpokladem $n > 3$.

Daný součet je celé číslo pro přirozená čísla n z množiny $\{1, 2, 3\}$.

---

5. *Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici.* *(J. Švrček)*

Řešení. Úhlopříčka AC je průměrem kružnice opsané čtverci $ABCD$, takže podle Thaletovy věty je úhel ALC pravý (obr. 3). Bod K je tak průsečíkem výšek CD a AL



Obr. 3

v trojúhelníku ACM, takže i přímka MK je kolmá na AC a protíná stranu BC daného čtverce v jejím vnitřním bodě N, neboť $MK \parallel DB$.

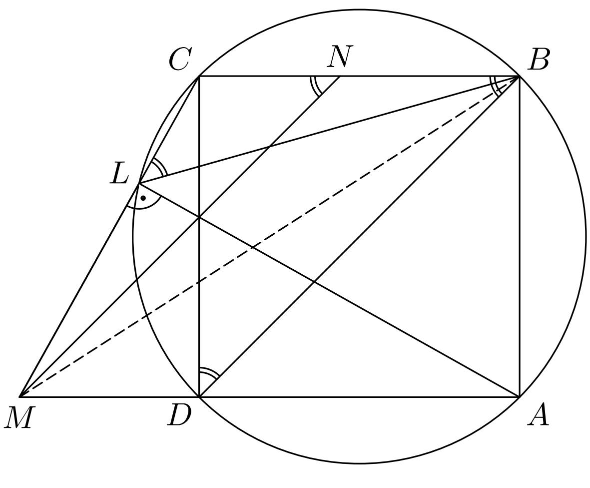
Nyní lze tvrzení úlohy dokázat několika způsoby.

1. Čtyřúhelníky $BCLD$ a $KLMD$ jsou tětivové, proto podle věty o obvodových úhlech postupně platí

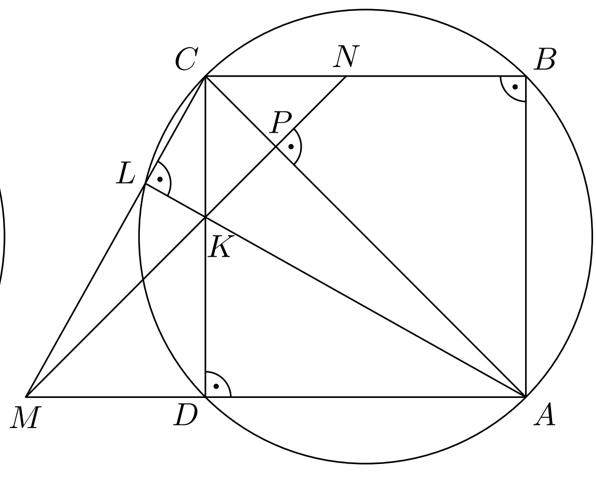
$$|\sphericalangle NBL| = |\sphericalangle CBL| = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle KDL| = |\sphericalangle KML| = |\sphericalangle NML|.$$

Protože body B a M leží v téže polorovině vyťaté přímkou NL, leží body B, L, M, N na téže kružnici.

2. Protože $MN \parallel DB$, je $|\sphericalangle MNC| = 45°$, rovněž úhel BLC nad tětivou BC kružnice k má velikost $45°$ (obr. 4), je tedy $|\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle BNM| = 135°$. Body L a N zřejmě leží v téže polorovině vyťaté přímkou MB, proto leží body B, L, M, N na téže kružnici.



Obr. 4



Obr. 5

3. Označme P patu výšky z vrcholu M na stranu AC a uvažujme čtyřúhelníky $ABNP$, $APKD$ a $DKLM$ (obr. 5). Podle Thaletovy věty jsou všechny tři čtyřúhelníky tětivové. Vrchol C daného čtverce $ABCD$ leží vně každé ze tří kružnic opsaných uvažovaným tětivovým čtyřúhelníkům, takže užitím věty o mocnosti bodu C ke kružnicím opsaným

po řadě čtyřúhelníkům $ABNP$, $APKD$, $DKLM$ obdržíme následující tři rovnosti

$$|CN| \cdot |CB| = |CP| \cdot |CA|,$$
$$|CP| \cdot |CA| = |CK| \cdot |CD|,$$
$$|CK| \cdot |CD| = |CL| \cdot |CM|,$$

z nichž bezprostředně vyplývá rovnost

$$|CN| \cdot |CB| = |CL| \cdot |CM|.$$

Odtud již plyne, že body B, L, M, N leží na téže kružnici.

---

6. *Nechť $\mathbb{R}_+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, které pro libovolná kladná čísla x, y splňují rovnost*

$$x^2\bigl(f(x) + f(y)\bigr) = (x + y)f\bigl(f(x)y\bigr).$$

(P. Kaňovský)

Řešení. Nechť f je libovolná z hledaných funkcí. Označme $f(1) = p$, vzhledem k podmínkám úlohy platí $p > 0$.

V daném vztahu položme $x = 1$, $y = 1$. Po úpravě dostaneme

$$p = f(p). \tag{1}$$

V daném vztahu dále položme $x = p$, $y = 1$. Potom

$$p^2\bigl(f(p) + p\bigr) = (p + 1)f\bigl(f(p)\bigr)$$

a podle (1) vyjde

$$2p^3 = (p + 1)p.$$

Tato algebraická rovnice má tři reálné kořeny $-\frac{1}{2}, 0, 1$. Jediný kořen vyhovující podmínce $p > 0$ je $p = 1$, tedy

$$f(1) = 1. \tag{2}$$

Nechť t je libovolné kladné reálné číslo. V daném vztahu položme $x = 1$, $y = t$, takže vzhledem k (2) dostaneme

$$1 + f(t) = (1 + t)f(t).$$

Odtud po úpravě

$$f(t) = \frac{1}{t}. \tag{3}$$

Dosazením snadno ověříme, že funkce $f(t) = 1/t$ vyhovuje rovnici ze zadání. Funkce určená vztahem (3) je jediné řešení dané úlohy.