ÚLOHY DOMÁCÍHO KOLA 54. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL

KATEGORIE A

1. Neprázdnou množinu přirozených přirozených čísel nazveme *malou*, když má méně prvků, než je její nejmenší prvek. Určete počet všech malých množin M, které jsou podmnožiny množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ a mají tuto vlastnost: patří-li do M dvě různá čísla x a y, patří do M rovněž číslo $|x - y|$. (*J. Földes*)

2. Nechť M je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme P, R průsečíky přímky AM po řadě s úsečkami BD, CD a podobně Q, S průsečíky přímky BM s úsečkami AC, DC. Dokažte, že přímky PS a QR jsou navzájem kolmé. (*J. Švrček*)

3. Nechť k je libovolné přirozené číslo. Uvažujme dvojice (a, b) celých čísel, pro něž mají kvadratické rovnice

$$x^2 - 2ax + b = 0, \qquad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálné kořeny (ne nutně různé), které lze označit $x_{1,2}$ respektive $y_{1,2}$ v takovém pořadí, že platí rovnost $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$.

a) Pro dané k určete největší možnou hodnotu b ze všech takových dvojic (a, b).

b) Pro $k = 2004$ určete počet všech takových dvojic (a, b).

c) Pro dané k vypočtěte součet čísel b ze všech takových dvojic (a, b), přičemž každé číslo b se přičítá tolikrát, v kolika dvojicích (a, b) vystupuje. (*E. Kováč*)

4. Dané aritmetické posloupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ mají stejný první člen a následující vlastnost: existuje index k $(k > 1)$, pro který platí rovnosti

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \quad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \quad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Najděte všechny takové indexy k. (*V. Bálint*)

5. V lichoběžníku $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E střed ramene BC. Dokažte, že rovnost $|AB| = |BC|$ platí, právě když čtyřúhelník $AECD$ je tečnový. (*R. Horenský*)

6. Najděte všechny funkce $f\colon \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, které vyhovují současně následujícím třem podmínkám:

a) Pro libovolná nezáporná reálná čísla x, y taková, že $x + y > 0$, platí rovnost

$$f\big(x\,f(y)\big)f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$

b) $f(1) = 0$;

c) $f(x) > 0$ pro libovolné $x > 1$. (*P. Calábek*)

KATEGORIE B

1. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro které má každá z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \qquad x^2 + (2a+1)x + 2b + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž kořeny druhé rovnice jsou převrácené hodnoty kořenů první rovnice. *(E. Kováč)*

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Přímka vedená bodem D protíná úsečku AC v bodě G, úsečku BC v bodě F a polopřímku AB v bodě E tak, že trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah. Určete poměr $|AG| : |GC|$. *(T. Jurík)*

3. Na stole leží k hromádek o $1, 2, 3, \ldots, k$ kamenech, kde $k \geq 3$. V každém kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a přidáme k ní jeden kámen, který na stole dosud neležel. Jestliže po několika krocích vznikne jediná hromádka, není výsledný počet kamenů dělitelný třemi. Dokažte. *(J. Zhouf)*

4. Označme V průsečík výšek a S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, který není rovnostranný. Pokud má úhel při vrcholu C velikost $60°$, je osa úhlu ACB osou úsečky VS. Dokažte. *(J. Zhouf)*

5. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5\lfloor x \rfloor - 7}{7\lfloor x \rfloor - 5},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo x (tzv. *dolní celou část* reálného čísla x). *(J. Šimša)*

6. Do kružnice k o poloměru r jsou vepsány dvě kružnice k_1, k_2 o poloměru $\frac{1}{2}r$, jež se vzájemně dotýkají. Kružnice l se vně dotýká kružnic k_1, k_2 a s kružnicí k má vnitřní dotyk. Kružnice m má vnější dotyk s kružnicemi k_2 a l a vnitřní dotyk s kružnicí k. Vypočtěte poloměry kružnic l a m. *(L. Boček)*

KATEGORIE C

1. Nechť a, b, c, d jsou taková reálná čísla, že $a + d = b + c$. Dokažte nerovnost

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c) \ge 0.$$

(*E. Kováč*)

2. Zjistěte, pro která přirozená čísla $n \ge 2$ je možno z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ vybrat navzájem různá sudá čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný číslem n. (*J. Zhouf*)

3. V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme E střed strany BC a F střed strany AD. Dokažte, že trojúhelníky AED a BFC mají stejný obsah, právě když jsou strany AB a CD rovnoběžné. (*J. Šimša*)

4. Tři čtyřmístná čísla k, l, m jsou stejného tvaru $ABAB$ (tj. číslice na místě jednotek je stejná jako číslice na místě stovek a číslice na místě desítek je stejná jako číslice na místě tisíců). Číslo l má číslici na místě jednotek o 2 větší a číslici na místě desítek o 1 menší než číslo k. Číslo m je součtem čísel k a l a je dělitelné devíti. Určete všechna taková čísla k. (*T. Joska*)

5. Určete počet všech trojic dvojmístných přirozených čísel a, b, c, jejichž součin abc má zápis, ve kterém jsou všechny číslice stejné. Trojice lišící se pouze pořadím čísel považujeme za stejné, tj. započítáváme je pouze jednou. (*J. Šimša*)

6. V trojúhelníku ABC se stranou BC délky 2 cm je bod K středem strany AB. Body L a M rozdělují stranu AC na tři shodné úsečky. Trojúhelník KLM je rovnoramenný a pravoúhlý. Určete délky stran AB, AC všech takových trojúhelníků ABC. (*P. Leischner*)