Úlohy domácího kola kategorie A

1. *Neprázdnou množinu přirozených čísel nazveme malou, když má méně prvků, než je její nejmenší prvek. Určete počet všech malých množin* M*, které jsou podmnožinami množiny* $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ *a mají tuto vlastnost: patří-li do* M *dvě různá čísla* x *a* y*, patří do* M *rovněž číslo* $|x - y|$.

Řešení. Zjistíme nejprve, jak vypadají všechny konečné neprázdné množiny M přirozených čísel s (klíčovou) vlastností ze závěru zadání. Teprve poté posoudíme, které z těchto množin jsou malé, a určíme počet těch z nich, které jsou sestaveny z čísel od 1 do 100.

Nechť M je tedy libovolná konečná neprázdná množina přirozených čísel s vlastností: je-li $x, y \in M$ a $x \neq y$, pak i $|x - y| \in$ M. Předpokládejme, že M má právě k prvků, a uspořádejme je podle velikosti od nejmenšího čísla po největší:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k.$$

V případě $k = 1$ splňuje množina M $= \{x_1\}$ danou vlastnost triviálně, předpokládejme proto dále, že $k > 1$. Pak číslo $x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$ podle posuzované vlastnosti patří do M a je menší než x_2, takže se musí rovnat číslu x_1. Z rovnosti $x_2 - x_1 = x_1$ dostáváme $x_2 = 2x_1$. Analogicky platí: čísla $x_3 - x_2$, $x_3 - x_1$ jsou dvě čísla z M, jež jsou menší než x_3, přitom $x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, takže musí platit $x_3 - x_2 = x_1$ a $x_3 - x_1 = x_2$, což spolu s dokázanou rovností $x_2 = 2x_1$ vede k závěru, že $x_3 = x_1 + x_2 = 3x_1$. Ve stejných úvahách může pokračovat a získávat rovnosti $x_4 = 4x_1$, ..., $x_k = kx_1$. Formálně lze tyto rovnosti dokázat indukcí: platí-li rovnost $x_n = nx_1$ pro některé n, $1 \leqq n < k$, pak úvahou o n číslech

$$x_{n+1} - x_n < x_{n+1} - x_{n-1} < \ldots < x_{n+1} - x_1,$$

která podle posuzované vlastnosti patří do M a jsou menší než x_{n+1}, docházíme k závěru, že $x_{n+1} - x_n = x_1$, odkud $x_{n+1} = x_n + x_1 = nx_1 + x_1 = (n + 1)x_1$. Důkaz indukcí je hotov. Označíme-li $x_1 = m$, plyne z našich úvah, že zkoumaná k-prvková množina M má nutně tvar

$$M = \{m, 2m, 3m, \ldots, km\}. \tag{1}$$

Na druhou stranu je zřejmé, že taková množina M má požadovanou vlastnost, ať jsou přirozená čísla m a k vybrána jakkoliv.

Množina M zapsaná v (1) má k prvků, přičemž nejmenší z nich je číslo m. Podle zadání úlohy je taková množina malá, právě když platí nerovnost $k < m$. Zároveň je jasné, že taková množina M je podmnožinou množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, právě když platí nerovnost $km \leqq 100$. Naší úlohou je tedy najít počet všech dvojic přirozených čísel k,

m, pro něž platí $k < m$ a $km \leqq 100$. Jak je při řešení obdobných kombinatorických úloh obvyklé, hledaný počet určíme, když vyhovující dvojice (k, m) vhodně rozdělíme do menších skupin a určíme počty dvojic v jednotlivých skupinách. V naší úloze se nabízí jednak rozdělení do skupin dvojic (k, m) se stejnou hodnotou k, jednak rozdělení do skupin dvojic (k, m) se stejnou hodnotou m. (To odpovídá tomu, že původní objekty (množiny M vyhovující úloze) rozdělíme do skupin buď podle počtu jejich prvků, nebo podle velikosti jejich nejmenších prvků.)

Uveďme zde oba výpočty. K tomu označme $p(k)$, $q(m)$ počty vyhovujících dvojic (k, m) s daným k, resp. daným m. Uvědomme si, že z nerovností $k < m$ a $km \leqq \leqq 100$ plynou odhady $1 \leqq k \leqq 9$ a $2 \leqq m \leqq 100$, které signalizují, že výpočet pomocí hodnot $p(k)$ bude méně pracný než výpočet pomocí hodnot $q(m)$.

Při pevném k jsou vyhovující čísla m určena nerovnostmi $k + 1 \leqq m \leqq 100/k$. Dosazením jednotlivých hodnot k zjistíme, že $p(1) = 99$, $p(2) = 48$, $p(3) = 30$, $p(4) = 21$, $p(5) = 15$, $p(6) = 10$, $p(7) = 7$, $p(8) = 4$ a $p(9) = 2$. Hledaný celkový počet je tedy roven

$$99 + 48 + 30 + 21 + 15 + 10 + 7 + 4 + 2 = 236.$$

Naopak při pevném m je číslo k omezeno takto: $1 \leqq k \leqq \min\{m-1, 100/m\}$. Odtud vypočteme, že $q(2) = 1$, $q(3) = 2$, $q(4) = 3, \ldots$, $q(9) = 8$, $q(10) = q(11) = 9$, $q(12) = 8$, $q(13) = q(14) = 7$, $q(15) = q(16) = 6$, $q(17) = \ldots = q(20) = 5$, $q(21) = \ldots = q(25) = 4$, $q(26) = \ldots = q(33) = 3$, $q(34) = \ldots = q(50) = 2$, $q(51) = \ldots = q(100) = 1$. Hledaný počet je tedy roven

$$1 + 2 + \ldots + 8 + 2 \cdot 9 + 8 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 50 = 236.$$

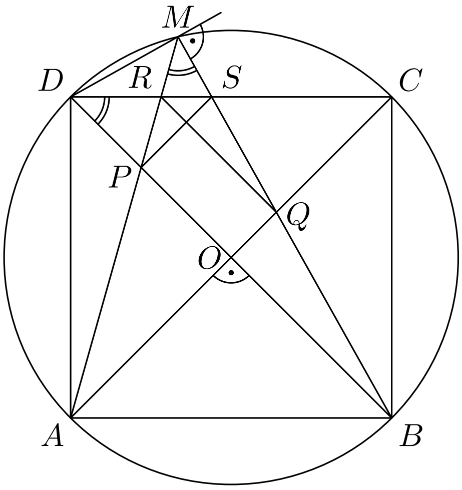
Při výpočtu jednotlivých hodnot $q(m)$ je výhodné si uvědomit, že pro každé přirozené $m \leqq 10$ platí nerovnost $m - 1 < 100/m$, zatímco pro každé $m \geqq 11$ platí opačná nerovnost $m - 1 > 100/m$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Kolik je všech malých množin (ve smyslu úlohy MO), které lze vybrat z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$? [9 jednoprvkových, $\binom{8}{2}$ dvojprvkových, $\binom{7}{3}$ tříprvkových, $\binom{6}{4}$ čtyřprvkových a 1 pětiprvková, dohromady 88 malých množin.]
2. Najděte všechny konečné neprázdné množiny M přirozených čísel s vlastností: je-li $x, y \in \mathsf{M}$ a $x \neq y$, pak i $|x - y| \in \mathsf{M}$. [$\mathsf{M} = \{m, 2m, 3m, \ldots, km\}$. Návod: viz výše první část řešení úlohy MO.]
3. Najděte všechny neprázdné množiny M celých čísel s vlastností: je-li $x, y \in \mathsf{M}$, pak i $x - y \in \mathsf{M}$. [Každá množina M je tvořena všemi celými násobky některého nezáporného celého čísla m. Návod: Nejdříve ukažte, že $0 \in M$ a $x \in \mathsf{M} \Leftrightarrow -x \in \mathsf{M}$. V případě, kdy $\mathsf{M} \neq \{0\}$, definujte m jako nejmenší kladný prvek M a ukažte pomocí věty o dělení celých čísel se zbytkem, že pro každé celé x platí: $x \in \mathsf{M} \Leftrightarrow m \mid x$.]

2. *Nechť M je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme P, R průsečíky přímky AM po řadě s úsečkami BD, CD a podobně Q, S průsečíky přímky BM s úsečkami AC, DC. Dokažte, že přímky PS a QR jsou navzájem kolmé.*

Řešení. Označme O střed daného čtverce $ABDC$ (obr. 1). Protože bod M leží na zmíněném oblouku, má úhel AMB velikost rovnou polovině velikosti středového (pravého) úhlu AOB, tedy $45°$. Protože stejnou velikost má ve čtverci $ABCD$ úhel BDC,



Obr. 1

je pod úhlem $45°$ z bodů D, M vidět tutéž úsečku PS. Protože navíc oba body D, M leží ve stejné polorovině s hranicí PS, je $PSMD$ tětivový čtyřúhelník. Jeho vnitřní úhel DMS je pravý (bod M totiž leží na Thaletově kružnici nad průměrem BD), takže je pravý i vnitřní úhel DPS. Tak jsme dokázali, že $PS \perp BD$. Zcela obdobně se ukáže, že $QR \perp AC$. Z posledních dvou vztahů již plyne, že $PS \perp QR$ (neboť $AC \perp BD$).

Návodné a doplňující úlohy:

1. Připomeňte si a dokažte věty o obvodových, středových a úsekových úhlech v kružnici.
2. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici. [MO 53–A–III–5, viz internetové stránky MO.]
3. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí rovnosti $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk. [MO 53–B–I–2, viz internetové stránky MO.]

3. *Nechť k je libovolné přirozené číslo. Uvažujme dvojice (a, b) celých čísel, pro něž mají kvadratické rovnice*

$$x^2 - 2ax + b = 0, \qquad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálné kořeny (ne nutně různé), které lze označit $x_{1,2}$, resp. $y_{1,2}$ v takovém pořadí, že platí rovnost $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$.

a) Pro dané k určete největší možnou hodnotu b ze všech takových dvojic (a, b).

b) Pro $k = 2\,004$ určete počet všech takových dvojic (a, b).

c) Pro dané k vypočtěte součet čísel b ze všech takových dvojic (a, b), přičemž každé číslo b se přičítá tolikrát, v kolika dvojicích (a, b) vystupuje.

Řešení. Úpravou rovnic „doplněním na čtverce“

$$(x-a)^2 = a^2 - b, \qquad (y+a)^2 = a^2 - b \tag{1}$$

(nebo přímým užitím známého vzorce s diskriminantem) zjišťujeme, že dané rovnice mají v oboru $\mathbb{R}$ kořeny, právě když celá čísla a, b splňují podmínku $a^2 - b \geqq 0$; tyto kořeny pak tvoří dvojice

$$\begin{aligned}\{x_1, x_2\} &= \bigl\{a + \sqrt{a^2-b}, a - \sqrt{a^2-b}\bigr\},\\ \{y_1, y_2\} &= \bigl\{-a + \sqrt{a^2-b}, -a - \sqrt{a^2-b}\bigr\}.\end{aligned}$$

Nyní stojíme před otázkou, jak efektivně (tj. bez stereotypního opakování obdobných výpočtů) určit všechny čtyři hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$, který lze zapsat poněkud neurčitě jako

$$\bigl(a \pm \sqrt{a^2-b}\bigr)\bigl(-a \pm \sqrt{a^2-b}\bigr) - \bigl(a \pm \sqrt{a^2-b}\bigr)\bigl(-a \pm \sqrt{a^2-b}\bigr),$$

kde při prvním a třetím výskytu znaku $\pm$, stejně jako při druhém a čtvrtém, vybíráme navzájem opačná znaménka. Naznačíme tři možné přístupy. (Celá diskuse bude sice delší, než kdybychom vypsali výpočet všech čtyř různých výrazů, ale o to nám v komentáři nejde.)

(i) Zvolíme-li pevně označení x_1, x_2, y_1, y_2, stačí vypočítat dvě hodnoty $V_1 = x_1y_1 - x_2y_2$, $V_2 = x_1y_2 - x_2y_1$, ostatní dvě hodnoty jsou k nim opačná čísla $V_3 = x_2y_2 - x_1y_1 = -V_1$ a $V_4 = x_2y_1 - x_1y_2 = -V_2$. Oddělený výpočet obou hodnot V_1, V_2 však není nezbytný, jak hned uvidíme.

(ii) Výběr znamének pro čísla x_1 a y_1 lze zapsat ve tvaru $x_1 = a + \varepsilon\sqrt{a^2-b}$ a $y_1 = -a + \delta\sqrt{a^2-b}$, kde koeficienty ε a δ jsou čísla z množiny $\{-1, 1\}$. Pak $x_2 = a - \varepsilon\sqrt{a^2-b}$, $y_2 = -a - \delta\sqrt{a^2-b}$ a stačí provést jediný výpočet s obecnými ε, δ (pro stručnost zápisu označíme ještě $c = \sqrt{a^2-b}$):

$$\begin{aligned}x_1y_1 - x_2y_2 &= (a+\varepsilon c)(-a+\delta c) - (a-\varepsilon c)(-a-\delta c) =\\ &= \bigl(-a^2 - \varepsilon ac + \delta ac + \varepsilon\delta c^2\bigr) - \bigl(-a^2 + \varepsilon ac - \delta ac + \varepsilon\delta c^2\bigr) =\\ &= -2a(\varepsilon - \delta)c.\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon - \delta$ nabývá hodnot -2, 0 a 2, hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$ jsou právě čísla $4a\sqrt{a^2-b}$, 0 a $-4a\sqrt{a^2-b}$.

(iii) Výběr znamének pro čísla x_1 a y_1 můžeme vyřešit zápisy $x_1 = a + u$ a $y_1 = -a + v$, kde u a v jsou reálná čísla splňující rovnosti $u^2 = v^2 = a^2 - b$. (Dodejme, že čísla u, v jsou vlastně základy druhých mocnin v rovnicích (1), nebo též čísla $\varepsilon\sqrt{a^2-b}$, $\delta\sqrt{a^2-b}$ z předchozího odstavce.) Potom platí $x_2 = a - u$, $y_2 = -a - v$ a

$$V = x_1y_1 - x_2y_2 = (a+u)(-a+v) - (a-u)(-a-v) = -2a(u-v).$$

Protože hodnoty $u - v$ za podmínky $u^2 = v^2 = a^2 - b$ jsou $-2\sqrt{a^2-b}$, 0 a $2\sqrt{a^2-b}$, docházíme ke stejnému závěru jako v (ii).

Po výpočtu hodnot výrazu V zjišťujeme, že rovnost $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$ nastane, právě když $4k \in \{-4a\sqrt{a^2-b}, 0, 4a\sqrt{a^2-b}\}$. Protože k je přirozené číslo, je $a \neq 0$ a poslední podmínka je ekvivalentní s rovností

$$k = |a|\sqrt{a^2-b}, \tag{2}$$

která je rozkladem čísla k na součin dvou činitelů, jež musejí být rovněž přirozená čísla. (Číslo $\sqrt{a^2-b}$ je rovno zlomku $k/|a|$, takže je to číslo racionální, a tudíž číslo celé.) Proto můžeme všechna celočíselná řešení (a, b) rovnice (2) snadno popsat: vezmeme libovolný rozklad $k = m \cdot n$ daného čísla k na dva (kladné) činitele m, n a z rovností $|a| = m$ a $\sqrt{a^2-b} = n$ snadno určíme obě vyhovující dvojice (a, b):

$$a = \pm m, \quad b = m^2 - n^2. \tag{3}$$

Nyní již máme všechno připraveno k řešení otázek původní úlohy.

Část a). Protože pro činitele m, n z libovolného rozkladu $k = m \cdot n$ platí $m \leqq k$ a $n \geqq 1$, plyne ze vzorce (3) odhad $b \leqq m^2 - 1$, přitom rovnost nastane, když zvolíme $m = k$ a $n = 1$. Pro dané k je tedy největší hodnota b rovna $b_{\max} = k^2 - 1$.

Část b). Pro $k = 2\,004$ existuje právě 12 uspořádaných dvojic (m, n), pro něž $2\,004 = m \cdot n$, neboť všech rozkladů čísla 2 004 na dva činitele (nehledíme-li na jejich pořadí) je právě šest: $1 \cdot 2\,004 = 2 \cdot 1\,002 = 3 \cdot 668 = 4 \cdot 551 = 6 \cdot 334 = 12 \cdot 167$. Protože můžeme dvěma způsoby volit znaménko čísla a ve vzorci (3), hledaný počet dvojic (a, b) je roven dvojnásobku počtu dvojic (m, n), tedy číslu $2 \cdot 12 = 24$.

Část c). Naším úkolem je určit součet čísel b z dvojic (a, b) určených vzorci (3), probíhají-li dvojice (m, n) všechny rozklady $k = m \cdot n$ daného čísla k. Je-li $m = n$, platí podle (3) $b = 0$, proto můžeme uvažovat jen takové dvojice činitelů (m, n), ve kterých $m \neq n$, a sdružit je do párů (m, n) a (n, m). Protože v každém páru pro součet příslušných hodnot b platí $(m^2 - n^2) + (n^2 - m^2) = 0$ (jak pro jednu, tak pro druhou volbu znaménka čísla a), je hledaný součet čísel b ze všech uvažovaných dvojic (a, b) roven nule (pro každé pevné k).

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Rovnice $x^2 + px + q = 0$ má kořeny x_1 a x_2. Vyjádřete pomocí čísel p, q hodnoty výrazů

$$x_1^2 + x_2^2, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \quad |x_1 - x_2|.$$

[$p^2 - 2q$, $-p/q$, $\sqrt{p^2 - 4q}$.]

2. Určete koeficient p rovnice $x^2 + px + 12 = 0$, víte-li, že v oboru $\mathbb{R}$ má dva kořeny, které lze označit $x_{1,2}$ tak, že platí $2x_1 + 3x_2 = 18$. [Návod: řešte soustavu rovnic $2x_1 + 3x_2 = 18$ a $x_1x_2 = 12$. Vyhovuje $p = -7$ a $p = -8$.]

4. *Dané aritmetické posloupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ mají stejný první člen a následující vlastnost: existuje index k $(k > 1)$, pro který platí rovnosti*

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \quad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \quad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Najděte všechny takové indexy k.

Řešení. Označme c, d diference první, resp. druhé z daných aritmetických posloupností. Protože podle zadání platí $y_1 = x_1$, mají členy obou posloupností obecné vyjádření

$$x_i = x_1 + (i-1)c \quad \text{a} \quad y_i = x_1 + (i-1)d$$

pro každý index i. Rozdíl $x_i^2 - y_i^2$ lze proto upravit do tvaru

$$\begin{aligned} x_i^2 - y_i^2 &= \bigl(x_1^2 + 2x_1(i-1)c + (i-1)^2c^2\bigr) - \bigl(x_1^2 + 2x_1(i-1)d + (i-1)^2d^2\bigr) = \\ &= 2x_1(i-1)(c-d) + (i-1)^2(c^2-d^2). \end{aligned}$$

Pro index k podle zadání úlohy platí soustava rovnic

$$53 = 2x_1(k-1)(c-d) + (k-1)^2(c^2-d^2), \tag{1}$$

$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) + (k-2)^2(c^2-d^2), \tag{2}$$

$$27 = 2x_1k(c-d) + k^2(c^2-d^2). \tag{3}$$

Tyto rovnice či jejich násobky teď vhodně navzájem sečteme. Abychom se zbavili členů s x_1, odečteme od dvojnásobku rovnice (1) součet rovnic (2) a (3), neboť u členu $2x_1(c-d)$ pak zůstane koeficient $2(k-1) - (k-2+k) = 0$. Protože $2 \cdot 53 - (78+27) = 1$ a $2(k-1)^2 - (k-2)^2 - k^2 = -2$, dostaneme zmíněnou kombinací jednoduchou rovnici $1 = -2(c^2-d^2)$, ze které určíme $c^2 - d^2 = -\frac{1}{2}$. To dosadíme do rovnic (2) a (3), které tak přejdou do tvaru

$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) - \frac{1}{2}(k-2)^2, \tag{2'}$$

$$27 = 2x_1k(c-d) - \frac{1}{2}k^2. \tag{3'}$$

Členů s x_1 se opět zbavíme, když od k-násobku rovnice (2′) odečteme $(k-2)$-násobek rovnice (3′); získanou rovnici s neznámou k pak vyřešíme:

$$\begin{aligned} 78k - 27(k-2) &= -\frac{1}{2}(k-2)^2 \cdot k + \frac{1}{2}k^2 \cdot (k-2), \\ 51k + 54 &= -\frac{1}{2}(k^3 - 4k^2 + 4k) + \frac{1}{2}(k^3 - 2k^2), \\ 0 &= k^2 - 53k - 54, \\ 0 &= (k+1)(k-54). \end{aligned}$$

Protože index k je přirozené číslo, platí nutně $k = 54$. Tím je úloha vyřešena.

Dodejme, že zadání úlohy nevyžaduje zkoumat, zda pro nalezenou (jedinou) hodnotu indexu k dvojice posloupností splňujících podmínky úlohy existuje. Pro zajímavost uveďme, že takových dvojic posloupností je dokonce nekonečně mnoho; je nutné a stačí, aby jejich společný první člen x_1 a diference c, d splňovaly podmínky $c^2 - d^2 = -\frac{1}{2}$ a $x_1(c-d) = \frac{55}{4}$. Plyne to snadno z kterékoliv z rovnic (1)–(3) po dosazení hodnot $k = 54$ a $c^2 - d^2 = -\frac{1}{2}$, přesvědčete se sami.

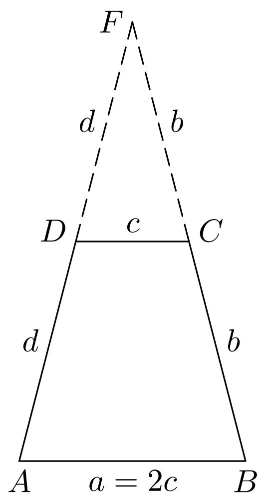
Návodné a doplňující úlohy:

1. Pro členy dvou aritmetických posloupností $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ platí rovnosti $x_1 = y_1$ a $x_9 = y_{13}$. Dokažte, že existuje index k takový, že $x_k = y_{100}$. Které další rovnosti $x_i = y_j$ jsou zaručeny? [$k = 67$, obecně $x_{2n+1} = y_{3n+1}$.]
2. Najděte všechny aritmetické posloupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, pro které platí
$$x_1^2 = x_2^2 = x_5^2 - 48.$$
[Dvě posloupnosti s obecnými členy $x_i = 2i - 3$, resp. $x_i = 3 - 2i$.]
3. Najděte všechny aritmetické posloupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, pro které platí $x_4^2 - x_3^2 = 15$ a zároveň $x_7^2 - x_5^2 = 120$. [Dvě posloupnosti s obecnými členy $x_i = 3i - 8$, resp. $x_i = 8 - 3i$.]
4. Platí-li v nekonstantní aritmetické posloupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ rovnost $x_k^2 = x_{2k}^2$ pro některý index k, pak $x_{3k-1} = -x_1$. Dokažte. [Návod: Zdůvodněte, proč $x_{2k} = -x_k$, odkud $x_{2k+i} = -x_{k-i}$ pro každé $i < k$.]
5. Které aritmetické posloupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ splňují rovnosti $x_1 = y_1 = 1$, $x_5^2 - y_5^2 = 9$ a $x_{13}^2 - y_{13}^2 = 45$? [$x_i = \frac{1}{2}(1 + i)$ a $y_i = \frac{1}{4}(5 - i)$.]

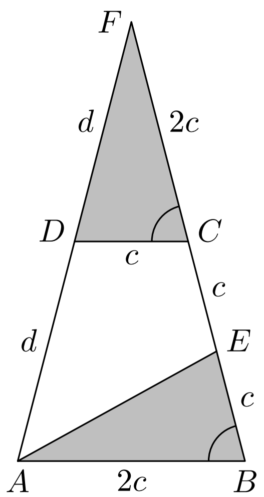
5. *V lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E střed ramene BC. Dokažte, že rovnost $|AB| = |BC|$ platí, právě když čtyřúhelník $AECD$ je tečnový.*

Řešení. Označme obvyklým způsobem a, b, c, d délky stran daného lichoběžníku. Podle zadání platí rovnost $a = 2c$, jež znamená, že základna CD je střední příčkou trojúhelníku ABF, kde F je průsečík ramen BC a AD prodloužených za vrchol C resp. D (obr. 2). Proto též platí $|CF| = b$ a $|DF| = d$.

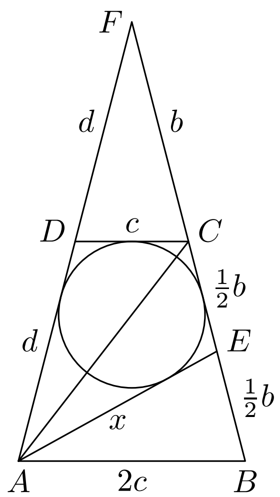
V první části řešení předpokládejme, že $|AB| = |BC|$ neboli $2c = b$ (obr. 3). Pak $|CF| = b = 2c$ a $|EB| = |EC| = \frac{1}{2}b = c$, takže trojúhelníky ABE a FCD (jež jsou na obr. 3 vybarveny) jsou shodné podle věty *sus* (jejich strany délek $2c$ a c svírají souhlasné úhly, vyťaté přímkou BC mezi rovnoběžkami AB a CD). Ze shodnosti třetích stran AE a FD pak plyne rovnost $|AE| = d$. Tak přicházíme k závěru, že strany čtyřúhelníku $AECD$ mají délky d, c, c, d; jde tudíž o tečnový čtyřúhelník (dokonce deltoid, případně kosočtverec).



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

V druhé části řešení předpokládejme, že čtyřúhelník $AECD$ je tečnový, takže podle známé věty pro délky jeho stran platí rovnost $|AE| + |CD| = |EC| + |AD|$, neboli $x + c = \frac{1}{2}b + d$, kde $x = |AE|$ (obr. 4). Odtud vyjádříme délku x, se kterou budeme dále pracovat, ve tvaru

$$x = \frac{b}{2} - c + d. \tag{1}$$

Všimněme si nyní, že úsečky CD, AC a AE dělí trojúhelník ABF na čtyři trojúhelníky téhož obsahu. (Podrobněji: z $|AD| = |DF|$, $|BC| = |CF|$ a $|BE| = |EC|$ plyne řetězec rovností $S_{ADC} = S_{CDF} = \frac{1}{2}S_{ACF} = \frac{1}{2}S_{ABC} = S_{ABE} = S_{ACE}$.) Proto pro obsahy čtyřúhelníku $AECD$ a trojúhelníku AEF platí úměra $S_{AECD} : S_{AEF} = 2 : 3$. Tyto dva mnohoúhelníky však mají společnou vepsanou kružnici, takže ve stejném poměru $2 : 3$ musí být i jejich obvody (připomeňme, že obsah mnohoúhelníku s obvodem o a vepsanou kružnicí o poloměru ϱ je roven $\frac{1}{2}o \cdot \varrho$). Protože tyto obvody mají vyjádření

$$o_{AECD} = x + \frac{b}{2} + c + d, \quad o_{AEF} = x + \frac{3b}{2} + 2d,$$

platí úměra $(x + \frac{1}{2}b + c + d) : (x + \frac{3}{2}b + 2d) = 2 : 3$, ze které snadno vyjádříme neznámou x jako

$$x = \frac{3b}{2} - 3c + d. \tag{2}$$

Porovnáním (1) a (2) dostaneme rovnost $b = 2c$, neboli $b = a$. Tím je rovnost $|AB| = |BC|$ dokázána.

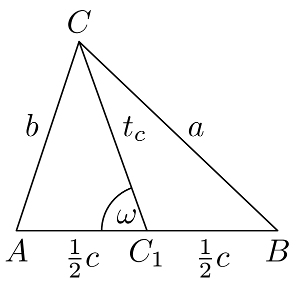
Jiné řešení. Připomeňme nejdříve vyjádření délek těžnic trojúhelníku pomocí délek jeho stran: v obecném trojúhelníku ABC při obvyklém označení platí vzorec

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \tag{1}$$

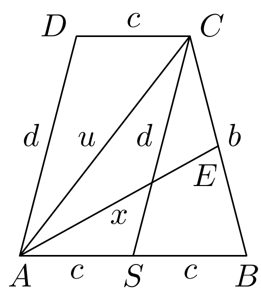
Odvození (1) je snadné: stačí sečíst rovnosti

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 - ct_c\cos\omega, \quad a^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 + ct_c\cos\omega,$$

které platí podle kosinové věty pro trojúhelníky ACC_1 a BCC_1, kde C_1 je střed strany AB a $\omega = |\sphericalangle AC_1C|$ (obr. 5).



Obr. 5



Obr. 6

V daném lichoběžníku $ABCD$ (v němž platí $a = 2c$) uvažujme kromě středu E ramene BC ještě střed S základny AB a označme $x = |AE|$ a $u = |AC|$ (obr. 6). Protože $|AS| = |SB| = \frac{1}{2}a = c$, je $ASCD$ rovnoběžník, tudíž $|CS| = d$. Nyní podle vzorců (1) vyjádříme délky těžnic AE a CS trojúhelníku ABC:

$$4x^2 = 2u^2 + 2(2c)^2 - b^2 \quad \text{a} \quad 4d^2 = 2u^2 + 2b^2 - (2c)^2.$$

Vzájemným odečtením těchto rovnic vyloučíme veličinu u a dostaneme

$$4(x^2 - d^2) = 3(4c^2 - b^2), \quad \text{neboli} \quad 4(x - d)(x + d) = 3(2c - b)(2c + b).$$

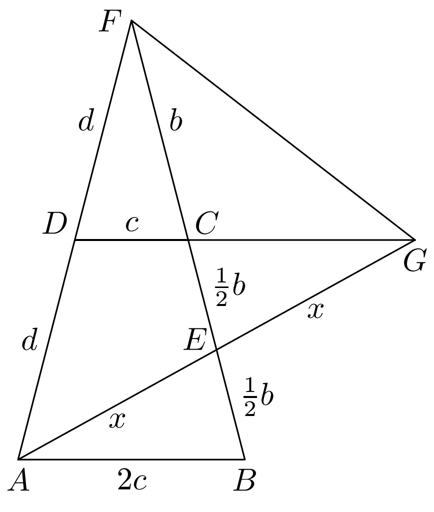
Odtud plyne, že znaménko rozdílu $x - d$ je vždy stejné jako znaménko rozdílu $2c - b$. Ukažme, že z tohoto poznatku plyne celé řešení naší úlohy. Použijeme k tomu známé kritérium pro tečnové čtyřúhelníky: čtyřúhelník $AECD$ je tečnový, právě když se rovnají oba součty délek jeho protilehlých stran, tj. právě když $x + c = d + \frac{1}{2}b$.

Je-li $b = 2c$, pak podle našeho poznatku $x = d$, a tedy $AECD$ je deltoid (případně kosočtverec). (Rovnost $x + c = d + \frac{1}{2}b$ tehdy platí dokonce „sčítanec po sčítanci“.)

Je-li $b > 2c$, pak podle našeho poznatku $x < d$, a tedy $x + c < d + \frac{1}{2}b$, takže čtyřúhelník $AECD$ není tečnový.

Je-li $b < 2c$, pak podle našeho poznatku $x > d$, a tedy $x + c > d + \frac{1}{2}b$, takže čtyřúhelník $AECD$ není tečnový.

Další řešení. V lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $a = 2c$, uvažujme kromě středu E ramene BC a průsečíku F prodloužených ramen BC, AD ještě průsečík G přímek AE, CD (obr. 7). Snadno vysvětlíme, že úsečky EF a DG jsou těžnice trojúhel-



Obr. 7

níku AFG (a bod C jeho těžiště). Platí-li rovnost $b = 2c$, jsou tyto těžnice shodné, a proto je trojúhelník AFG rovnoramenný se základnou FG, tudíž $AECD$ je deltoid (nebo kosočtverec). Lze-li naopak čtyřúhelníku $AECD$ vepsat kružnici, je tato kružnice vepsána i oběma trojúhelníkům AEF a ADG, jež mají shodné obsahy (totiž rovné vždy polovině obsahu trojúhelníku AFG). Pak se ovšem musí rovnat i jejich obvody, což pro délku $x = |AE| = |EG|$ dává rovnici

$$x + \frac{3b}{2} + 2d = 2x + 3c + d,$$

ze které vychází vyjádření neznámé x ve tvaru (2) z prvního řešení. Stejně jako tam pak dojdeme k rovnosti $b = 2c$.

Nad obrázkem 7 lze uvažovat i takto: čtyřúhelník $AECD$ bude tečnový, právě když splynou kružnice vepsané trojúhelníkům AEF a ADG. Tyto trojúhelníky mají totožná ramena vnitřních úhlů při společném vrcholu A, takže jejich vepsané kružnice splynou, právě když budou mít shodné poloměry. To je však ekvivalentní s tím, že oba trojúhelníky mají stejný obvod (vždy totiž mají stejný obsah). Protože společná část hranic trojúhelníků AEF a ADG je tvořena lomenou čarou EAD, rovnají se jejich obvody, právě když platí rovnost $|DF| + |FE| = |DG| + |GE|$. Protože $DE \parallel FG$, je z úvahy o elipse s ohnisky D, E jasné, že odvozená rovnost nastane, právě když úsečky DE a FG mají společnou osu souměrnosti (a $AECD$ je pak deltoid, případně kosočtverec).

Návodné a doplňující úlohy:

1. Připomeňte si a dokažte *kritérium pro tečnové čtyřúhelníky*: Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový, právě když se rovnají oba součty délek jeho protilehlých stran, tj. právě když $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.
2. Nechť D, E značí body dotyku strany AB a kružnice vepsané trojúhelníku ABC, resp. kružnice připsané jeho straně AB (tj. kružnice dotýkající se strany AB a polopřímek opačných k polopřímkám AC a BC). Dokažte, že body D, E mají vzdálenosti od vrcholů A, B dané vzorci

$$|AD| = |BE| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \quad |BD| = |AE| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2}.$$

[Návod: Využijte několikrát toho, že pro body dotyku $T_{1,2}$ obou tečen sestrojených z libovolného vnějšího bodu X k dané kružnici platí $|XT_1| = |XT_2|$.]

3. Uvnitř stran AB, BC, CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K, L, M a N. Označme S průsečík přímek KM a LN. Je-li možno vepsat kružnice čtyřúhelníkům $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, je možno vepsat kružnici i čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte. [MO 51–B–II–3, viz internetové stránky MO.]

6. *Najděte všechny funkce $f\colon \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, které vyhovují současně následujícím třem podmínkám:*

a) Pro libovolná nezáporná reálná čísla x, y taková, že $x + y > 0$, platí rovnost

$$f\bigl(xf(y)\bigr)f(y) = f\Bigl(\frac{xy}{x+y}\Bigr);$$

b) $f(1) = 0$;

c) $f(x) > 0$ *pro libovolné* $x > 1$.

Řešení. V první části řešení předpokládejme, že $f\colon \langle 0,+\infty) \to \langle 0,+\infty)$ je libovolná z hledaných funkcí. Dosadíme-li do dané rovnice hodnotu $y = 1$ a číslo $x \geqq 0$ ponecháme libovolné, dostaneme

$$f\bigl(xf(1)\bigr)f(1) = f\Bigl(\frac{x}{x+1}\Bigr).$$

Vzhledem k tomu, že $f(1) = 0$ podle podmínky b), poslední rovnost znamená, že

$$f\Bigl(\frac{x}{x+1}\Bigr) = 0 \quad \text{pro každé } x \geqq 0.$$

Vidíme, že funkce f nabývá hodnoty nula ve všech bodech definičního oboru, které lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\dfrac{x}{x+1}$ s vhodným $x \geqq 0$. Každý takový zlomek jistě leží v intervalu $\langle 0,1)$, naopak pro každé reálné číslo $t \in \langle 0,1)$ zřejmě má rovnice $t = \dfrac{x}{x+1}$ nezáporné řešení $x = \dfrac{t}{1-t}$.

Zjištěný poznatek spolu s podmínkou c) ze zadání úlohy vede k závěru, že rovnost $f(t) = 0$ platí, právě když $t \in \langle 0,1\rangle$. Abychom určili (kladnou) hodnotu $f(t)$ pro pevné $t > 1$, uvážíme dvě rovnice s takovým parametrem t a neznámou x, totiž rovnice

$$f\bigl(x\,f(t)\bigr)f(t) = 0 \qquad \text{a} \qquad f\Bigl(\frac{xt}{x+t}\Bigr) = 0.$$

Protože podle zadání úlohy se levé strany obou rovnic rovnají (zvolme $y = t$ v dané funkcionální rovnici) a $f(t) > 0$, musí mít obě rovnice stejné množiny řešení. Pro první z nich je tato množina určena soustavou nerovnic $0 \leqq x\,f(t) \leqq 1$, takže tvoří interval $\Bigl\langle 0, \dfrac{1}{f(t)}\Bigr\rangle$; druhá rovnice je ekvivalentní se soustavou nerovnic $0 \leqq \dfrac{xt}{x+t} \leqq 1$, jejíž řešení (s ohledem na $x + t > 0$) tvoří interval $\Bigl\langle 0, \dfrac{t}{t-1}\Bigr\rangle$. Z totožnosti obou intervalů plyne rovnost

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{t}{t-1}, \quad \text{neboli} \quad f(t) = \frac{t-1}{t}.$$

Našli jsme hodnotu $f(t)$ pro každé $t > 1$. Můžeme tedy shrnout, že hledaná funkce f musí mít tvar

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t \leqq 1),\\[2ex] \dfrac{t-1}{t} & (t > 1). \end{cases}$$

V druhé části řešení ukážeme, že funkce f určená posledním předpisem má skutečně vlastnost a) ze zadání úlohy (vlastnosti b) a c) jsou zřejmé). Rovnosti obou stran

$$L = f\bigl(x\,f(y)\bigr)f(y), \quad P = f\Bigl(\frac{xy}{x+y}\Bigr)$$

dané funkcionální rovnice dokážeme v každém ze čtyř případů rozlišených podle možných hodnot proměnné y a zlomku $\dfrac{xy}{x+y}$:

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & y = 0 \ (\text{a } x > 0), & \text{(ii)} & 0 < y \leqq 1, \\ \text{(iii)} & y > 1 \text{ a } \dfrac{xy}{x+y} \leqq 1, & \text{(iv)} & y > 1 \text{ a } \dfrac{xy}{x+y} > 1. \end{array}$$

Případ (i). Z $y = 0$ plyne $f(y) = 0$ a $\dfrac{xy}{x+y} = 0$, takže rovněž $f\Big(\dfrac{xy}{x+y}\Big) = 0$, tudíž $L = P = 0$.

Případ (ii). Z $0 < y \leqq 1$ plyne $\dfrac{xy}{x+y} < 1$, takže opět $L = P = 0$.

Případ (iii). Z $y > 1$ a $\dfrac{xy}{x+y} \leqq 1$ plyne $x \leqq \dfrac{y}{y-1}$, takže s ohledem na hodnotu $f(y) = \dfrac{y-1}{y}$ platí nerovnost $x\,f(y) \leqq 1$, tudíž opět $L = P = 0$.

Případ (iv). Z $y > 1$ a $\dfrac{xy}{x+y} > 1$ plyne $x > \dfrac{y}{y-1}$, takže s ohledem na hodnotu $f(y) = \dfrac{y-1}{y}$ platí nerovnost $x\,f(y) > 1$, tudíž

$$L = \frac{x \cdot \dfrac{y-1}{y} - 1}{x \cdot \dfrac{y-1}{y}} \cdot \frac{y-1}{y} = \frac{xy - x - y}{xy},$$

$$P = \frac{\dfrac{xy}{x+y} - 1}{\dfrac{xy}{x+y}} = \frac{xy - x - y}{xy}.$$

Rovnost $L = P$ je tak dokázána ve všech případech.

Návodné a doplňující úlohy:

K seznámení s tématem a řešenými příklady funkcionálních rovnic doporučujeme brožuru L. Davidov: *Funkcionální rovnice*, Škola mladých matematiků č. 55, Mladá fronta, Praha 1984.

1. Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které pro libovolná kladná čísla x, y splňují rovnost

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(f(x)y).$$

[MO 53–A–III–6, viz internetové stránky MO.]

2. Nechť $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnost

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

[MO 51–A–III–6, viz internetové stránky MO.]