54. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácího kola kategorie B

1. *Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro které má každá z rovnic*

$$x^2 + ax + b = 0, \qquad x^2 + (2a+1)x + 2b + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž kořeny druhé rovnice jsou převrácené hodnoty kořenů první rovnice.

Řešení. Nechť x_1, x_2 jsou kořeny první rovnice. Potom

$$x_1 + x_2 = -a, \qquad x_1 x_2 = b,$$

a protože druhá rovnice má kořeny $1/x_1$ a $1/x_2$, platí

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -(2a+1), \qquad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 2b + 1.$$

Je tedy $\dfrac{1}{b} = 2b + 1$, což vede na kvadratickou rovnici $2b^2 + b - 1 = 0$, která má kořeny $b = -1$ a $b = \frac{1}{2}$.

Pro $b = -1$ máme

$$-(2a+1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-a}{-1},$$

což je pro neznámou a lineární rovnice s řešením $a = -\frac{1}{3}$.

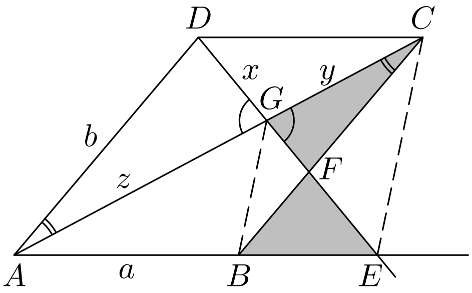
Obdobně pro $b = \frac{1}{2}$ dostáváme $-(2a+1) = -2a$, tato rovnice však nemá řešení. Zkouškou (je třeba ověřit, že kořeny jsou reálné) se přesvědčíme, že dvojice $a = -\frac{1}{3}$, $b = -1$ je (jediným) řešením úlohy.

Návodné úlohy:

1. Zjistěte, pro které hodnoty parametru a má rovnice $x^2 + 3ax + 16a = 0$ dva různé kořeny, ze kterých jeden je druhou mocninou druhého. [$a = -4$, $a = -\frac{4}{27}$. Návod: Z rovnic $x_1 + x_1^2 = -3a$, $x_1 \cdot x_1^2 = 16a$ plyne $\frac{x_1^2}{x_1+1} = -\frac{16}{3}$.]
2. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a, b má rovnice $x^2 - (a^2+3)x + b = 0$ dva různé kořeny, které jsou druhými mocninami kořenů rovnice $x^2 - (a+3)x + b = 0$. [$(a, b) = (-1, 0)$ a $(a, b) = (-\frac{2}{3}, 1)$]
3. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a, b má rovnice $x^2 + bx + b = 0$ dva různé kořeny, přičemž každý z nich je o 1 větší než kořen rovnice $x^2 + ax + b = 0$. [$(a, b) = (-1, -3)$]

2. *Je dán rovnoběžník $ABCD$. Přímka vedená bodem D protíná úsečku AC v bodě G, úsečku BC v bodě F a polopřímku AB v bodě E tak, že trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah. Určete poměr $|AG|:|GC|$.*

Řešení. Z obr. 1 je vidět, že trojúhelníky AGD a CGF jsou podobné podle věty



Obr. 1

uu. Příslušný poměr podobnosti k je roven hledanému poměru $|AG|:|GC|$. Označíme-li proto $b=|AD|$, $x=|DG|$ a $y=|CG|$, platí $|GF|=x/k$ a $|CF|=b/k$, odkud

$$|FB|=|BC|-|FB|=b-\frac{b}{k}=(k-1)\frac{b}{k}$$

a

$$|DF|=|DG|+|GF|=x+\frac{x}{k}=(k+1)\frac{x}{k}.$$

Z podobnosti trojúhelníků $BEF\sim CDF$ dostáváme

$$|EF|=\frac{|DF|\cdot|BF|}{|CF|}=\frac{k^2-1}{k}\cdot x.$$

Z rovnosti obsahů trojúhelníků BEF a CGF vyplývá

$$|FB|\cdot|FE|=|FC|\cdot|FG|,$$

odkud po dosazení vyjde

$$\frac{k-1}{k}\cdot b\cdot\frac{k^2-1}{k}\cdot x=\frac{b}{k}\cdot\frac{x}{k}.$$

Je tedy $k^3-k^2-k+1=1$, a protože $k\neq 0$, dostáváme pro hledané k kvadratickou rovnici $k^2-k-1=0$. Úloze vyhovuje její kladný kořen $k=\frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big)$.

Jiné řešení. Označme $|AG|=z$, $|GC|=y$. Protože trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah, mají stejný obsah i trojúhelníky GBE a GBC. Proto platí $EC\parallel BG$. Z podobnosti trojúhelníků $ABG\sim AEC$, $DFC\sim EFB$, $CFE\sim BFG$ a $AEC\sim ABG$ postupně plyne

$$\frac{z}{y}=\frac{|AG|}{|GC|}=\frac{|AB|}{|BE|}=\frac{|DC|}{|BE|}=\frac{|FC|}{|BF|}=\frac{|CE|}{|BG|}=\frac{|AC|}{|AG|}=\frac{z+y}{z}.$$

Z výsledné rovnosti $z/y = 1 + y/z$ dostáváme

$$\left(\frac{z}{y}\right)^2 - \frac{z}{y} - 1 = 0,$$

a protože $z/y > 0$, je

$$\frac{z}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Návodné úlohy:

1. Označme P průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že trojúhelníky APD a CPB mají stejný obsah, právě když $AB \parallel CD$.
2. Označme P průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a K, L průsečíky přímky vedené bodem P rovnoběžně se stranou AB. Dokažte, že rovnost $|KP| = |PL|$ platí, právě když $AB \parallel CD$.

3. *Na stole leží k hromádek o $1, 2, 3, \ldots, k$ kamenech, kde $k \geqq 3$. V každém kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a přidáme k ní jeden kámen, který na stole dosud neležel. Jestliže po několika krocích vznikne jediná hromádka, není výsledný počet kamenů dělitelný třemi. Dokažte.*

Řešení. V každém kroku se počet hromádek zmenší o dvě. Aby vznikla jedna hromádka, musí být na začátku lichý počet hromádek, tedy $k = 2m + 1$. Na zmenšení počtu hromádek o $2m$ je třeba m kroků. Při každém přibude jeden kamen, a proto je výsledný počet kamenů

$$p = 1 + 2 + 3 + \ldots + (2m+1) + m = \frac{(2m+1)(2m+2)}{2} + m = 2m^2 + 4m + 1.$$

Číslo m má jeden ze tvarů $m = 3n$, $m = 3n + 1$, $m = 3n + 2$. V prvním případě je $p = 18n^2 + 12n + 1 = 3(6n^2 + 2n) + 1$, ve druhém $18n^2 + 24n + 7 = 3(6n^2 + 8n + 2) + 1$ a ve třetím $p = 18n^2 + 36n + 17 = 3(6n^2 + 12n + 5) + 2$. Žádné z těchto čísel není dělitelné třemi.

Poznámka. Stačí ověřit, že p není dělitelné třemi pro $m = 0$, $m = 1$ a $m = 2$ [návodná úloha 1].

Návodné úlohy:

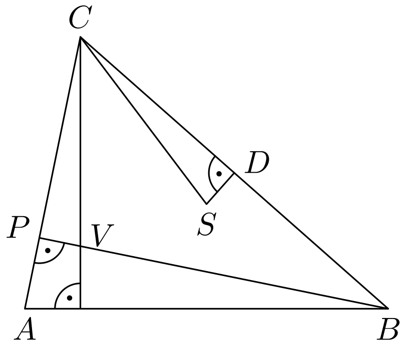
1. Nechť p je polynom s celočíselnými koeficienty, n je celé a k přirozené číslo. Dokažte, že čísla $p(n+k)$ a $p(n)$ dávají při dělení číslem k stejný zbytek.
2. Nechť n je celé číslo. Dokažte, že číslo $n^3 + n + 1$ není dělitelné sedmi.
3. Na stole leží k hromádek o $1, 2, 3, \ldots, k$ kamenech, $k \geqq 5$. V každém kroku vybereme 4 libovolné hromádky, sloučíme je do jedné a ještě k ní přidáme jeden kamen z jakékoliv další hromádky. Určete všechna k, pro která po konečném počtu kroků může vzniknout jediná hromádka. [$k \in \{5, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 18\}$ a všechna $k \geqq 20$.]

4. *Označme V průsečík výšek a S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, který není rovnostranný. Pokud má úhel při vrcholu C velikost $60°$, je osa úhlu ACB osou úsečky VS. Dokažte.*

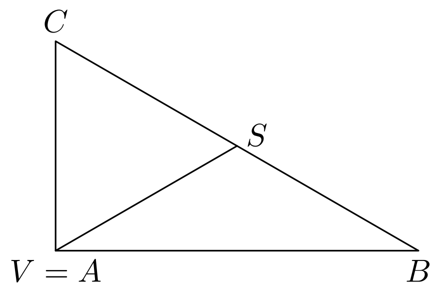
Řešení. Nechť například $|AC| < |BC|$. Předpokládejme nejprve, že trojúhelník ABC je ostroúhlý. Označme D střed strany BC a P patu výšky z vrcholu B na stranu AC (obr. 2). Platí $|CP| = |BC| \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}|BC| = |CD|$, $|\sphericalangle CPV| = |\sphericalangle CDS| = 90°$, $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CSD|$ (obvodový úhel a polovina středového). Ze shodnosti trojúhelníků CPV a CDS vyplývá $|CV| = |CS|$, $|\sphericalangle PCV| = |\sphericalangle DCS|$. Trojúhelník VSC je tedy rovnoramenný, a osa úhlu ACB je tak i osou úhlu VCS a současně osou strany VS.

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý (obr. 3), je trojúhelník VSC rovnostranný a osa úhlu VCS je i osou strany VS.

Je-li trojúhelník ABC tupoúhlý, dokážeme tvrzení úlohy stejně jako v případě ostroúhlého trojúhelníku s tím rozdílem, že bude $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CSD| = 180° - |\sphericalangle CAB|$.



Obr. 2



Obr. 3

Návodné úlohy:

1. Označme V průsečík výšek a S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Vypočítejte velikost úhlu ACB, jestliže platí $|VC| = |SC|$.
2. Nechť V je průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že body souměrně sdružené s bodem V podle stran trojúhelníku ABC leží na kružnici opsané tomuto trojúhelníku.

5. *V oboru reálných čísel řešte rovnici*

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5\lfloor x \rfloor - 7}{7\lfloor x \rfloor - 5},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo x (tzv. dolní celou část reálného čísla x).

Řešení. Každé reálné číslo x můžeme zapsat ve tvaru $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je *celá část* a $\{x\}$ tzv. *zlomková část* čísla x. Zřejmě platí $0 \leqq \{x\} < 1$, přičemž $\{x\} = 0$, právě když x je celé. Odtud vyplývá, že $\lfloor x \rfloor \leqq x < \lfloor x \rfloor + 1$, přičemž rovnost $\lfloor x \rfloor = x$ platí, právě když x je celé; tyto nerovnosti často používáme při řešení úloh s celou částí. Označíme-li $\lfloor x \rfloor = k$, dostaneme z dané rovnice po odstranění zlomku a roznásobení

$$7kx - 5x = 5kx + 20k - 7x - 28$$

a odtud
$$x = \frac{10k - 14}{k + 1}. \tag{1}$$
Protože $k = \lfloor x \rfloor$, musí platit
$$k \leqq \frac{10k - 14}{k + 1} < k + 1.$$

Každou z nerovnic vyřešíme samostatně:
$$0 \geqq \frac{k(k+1) - (10k - 14)}{k + 1} = \frac{(k-7)(k-2)}{k+1}, \qquad k \in (-\infty, -1) \cup \langle 2, 7 \rangle;$$
$$0 < \frac{(k+1)^2 - (10k - 14)}{k + 1} = \frac{(k-3)(k-5)}{k+1}, \qquad k \in (-1, 3) \cup (5, \infty).$$

Protože k je celé, máme $k \in \{2, 6, 7\}$. Rovnice má tedy tři řešení, která dostaneme dosazením do vztahu (1): $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{46}{7}$, $x_3 = 7$.

Některé další vlastnosti celé části: Je-li k celé, je $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

Je-li $\{x\} + \{y\} < 1$, platí $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$; je-li $\{x\} + \{y\} \geqq 1$, platí $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Nechť k je přirozené číslo, $k > 1$. Ke každému reálnému číslu x existuje právě jedno $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že $\{x\} \in \langle \frac{i-1}{k}, \frac{i}{k})$. Potom $k\lfloor x \rfloor + i - 1 \leqq kx < k\lfloor x \rfloor + i$, a proto $\lfloor kx \rfloor = k\lfloor x \rfloor + i - 1$.

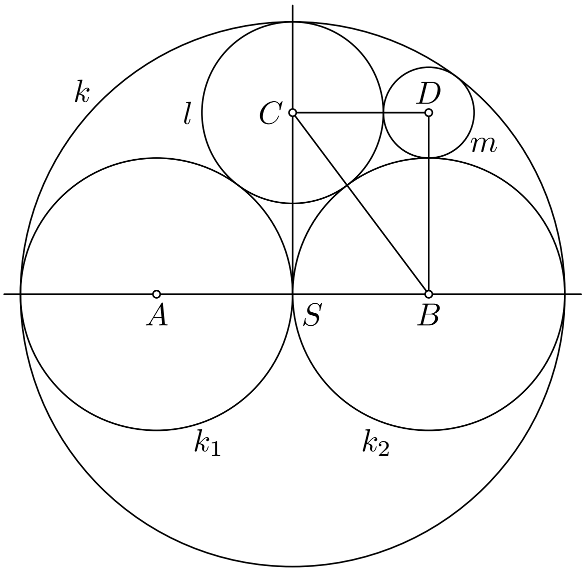
NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Vyřešte rovnici $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1 \rfloor = x + 2$. [$x = 1$]
2. Vyřešte rovnici $2x = \lfloor x \rfloor + 1$. [$x \in \{\frac{1}{2}, 1\}$]
3. Vyřešte rovnici $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 4x - 1$. [$x \in \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$]
4. Vyřešte soustavu rovnic $\lfloor x \rfloor = 2y + \frac{1}{3}$, $\lfloor y \rfloor = 3x - \frac{1}{2}$. [$x = -\frac{1}{6}$, $y = -\frac{2}{3}$]

6. *Do kružnice k o poloměru r jsou vepsány dvě kružnice k_1, k_2 o poloměru $\frac{1}{2}r$, jež se vzájemně dotýkají. Kružnice l se vně dotýká kružnic k_1, k_2 a s kružnicí k má vnitřní dotyk. Kružnice m má vnější dotyk s kružnicemi k_2 a l a vnitřní dotyk s kružnicí k. Vypočtěte poloměry kružnic l a m.*

ŘEŠENÍ. Označme S, A, B, C, D středy kružnic k, k_1, k_2, l, m a x, y poloměry kružnic l a m. Bod C leží na přímce, která prochází bodem S a je kolmá na AB (obr. 4). Z pravoúhlého trojúhelníku BCS máme podle Pythagorovy věty
$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2$$
a odtud $x = \frac{1}{3}r$. Označme P, Q paty kolmic z bodu D na přímky AB a SC a $u = |SP|$, $v = |SQ|$. Jestliže $u \neq \frac{1}{2}r$, je BPD pravoúhlý trojúhelník a podle Pythagorovy věty
$$\left(\frac{r}{2} + y\right)^2 = v^2 + \left(u - \frac{r}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Tato rovnice platí i v případě $u = \frac{1}{2}r$.



Obr. 4

Podobně z pravoúhlého trojúhelníku QCD (jestliže $Q \neq C$) anebo porovnáním protilehlých stran obdélníku (jestliže $Q = C$) dostaneme

$$\left(\frac{r}{3} + y\right)^2 = u^2 + \left(v - \frac{2r}{3}\right)^2. \tag{2}$$

Navíc z pravoúhlého trojúhelníku SPD máme

$$(r - y)^2 = u^2 + v^2. \tag{3}$$

Odečtením rovnic (3) a (2) dostaneme $\frac{4}{3}r^2 - \frac{8}{3}ry = \frac{4}{3}vr$, tedy $v = r - 2y$. Podobně odečtením rovnic (3) a (1) vyjde $r^2 - 3ry = ur$ a odtud $u = r - 3y$. Dosazením do (3) a úpravou postupně dostaneme

$$\begin{gathered}(r - y)^2 = (r - 3y)^2 + (r - 2y)^2,\\ r^2 - 8ry + 12y^2 = 0,\\ (r - 6y)(r - 2y) = 0.\end{gathered}$$

Odtud plyne, že $y = \frac{1}{2}r$ nebo $y = \frac{1}{6}r$. Poloměr $\frac{1}{2}r$ má kružnice k_1, poloměr $\frac{1}{6}r$ kružnice m znázorněná na obr. 4. Každá z těchto dvou kružnic se dotýká kružnic k, k_2 a l požadovaným způsobem.

Návodné úlohy:

1. Kružnice k_2 o poloměru $\frac{1}{2}$ se dotýká zevnitř kružnice k_1 o poloměru 1. Přímka p prochází středy kružnic k_1 a k_2. Vypočítejte poloměr kružnice, která se dotýká přímky p a obou dvou kružnic k_1 a k_2. [$\frac{4}{9}$]
2. Každá z kružnic k_1, k_2, k_3 se dotýká vně dvou zbývajících. Kružnice k_1 a k_2 mají stejný poloměr r, kružnice k_3 má poloměr $\frac{8}{5}r$. Všechny kružnice k_1, k_2, k_3 mají vnitřní dotyk s kružnicí k o poloměru 1. Vypočtěte poloměr r. [$\frac{3}{8}$]
3. Každá z kružnic k_1, k_2, k_3 se dotýká vně dvou zbývajících. Kružnice k_1 má poloměr 1, kružnice k_2 má poloměr 2 a kružnice k_3 má poloměr 3. Vypočítejte poloměry kružnic, které se dotýkají všech třech kružnic k_1, k_2, k_3. [$\frac{6}{23}$ a 6]