54. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácího kola kategorie C

1. *Nechť a, b, c, d jsou taková reálná čísla, že $a+d=b+c$. Dokažte nerovnost*

$$(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c) \geqq 0.$$

ŘEŠENÍ. Vyjádříme-li z rovnosti v předpokladu např. $d=b+c-a$ a dosadíme-li tuto hodnotu do levé strany dokazované nerovnosti, postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}&(a-b)(a-b)+(a-c)(a-c)+(b+c-2a)(b-c)=\\&=a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2+bc-2ab-bc-c^2+2ac=\\&=2a^2-4ab+2b^2=2(a^2-2ab+b^2)=2(a-b)^2.\end{aligned}$$

Tento výraz je nezáporný pro všechna reálná čísla a, b, čímž je daná nerovnost dokázána.

Jiné řešení. Nejprve ponecháme podmínku $a+d=b+c$ stranou a ukážeme, že výraz z levé strany dokazované nerovnosti lze upravit na součin. První část výrazu, součin $(a-b)(c-d)$, je roven nule v případech, kdy $a=b$ nebo $c=d$; druhá část výrazu, součet $(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)$, má rovněž v obou případech $a=b$, $c=d$ nulovou hodnotu, takže musí být dělitelný součinem $(a-b)(c-d)$. Přesvědčíme se o tom roznásobením a následným postupným vytýkáním:

$$\begin{aligned}(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)&=(ab-bc-ad+cd)+(bd-ab-cd+ac)=\\&=(-bc+bd)+(-ad+ac)=-b(c-d)+a(c-d)=\\&=(a-b)(c-d).\end{aligned}$$

Dokazovaná nerovnost má proto tvar

$$2(a-b)(c-d) \geqq 0,$$

do kterého nyní dosadíme $c-d=a-b$. Dostaneme tak nerovnost

$$2(a-b)^2 \geqq 0,$$

která platí pro všechna reálná čísla a, b. Tím je daná nerovnost dokázána.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Nechť pro libovolná reálná čísla a, b, c platí $a+b+c=0$. Dokažte rovnost
$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$
[$a^3+b^3-(a+b)^3=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=-3ab(a+b)=3abc.$]
2. Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b, c platí
$$bc(c-b)+ac(a-c)+ab(b-a)=(a-b)(b-c)(c-a).$$

2. *Zjistěte, pro která přirozená čísla n ($n \geqq 2$) je možno z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ vybrat aspoň dvě navzájem různá sudá čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný číslem n.*

Řešení. Je-li n sudé a v dané množině jsou sudá čísla 2 a $n-2$, přičemž $2 < n-2$, je jejich součet $2 + (n-2) = n$ dělitelný číslem n. Z podmínky $2 < n-2$ tedy plyne, že všechna sudá čísla $n > 4$ vyhovují podmínce úlohy.

Z množin $\{1\}$ (pro $n = 2$) a $\{1, 2, 3\}$ (pro $n = 4$) zřejmě nelze požadovaný výběr provést.

Je-li n liché, můžeme pro $n > 7$ z dané množiny analogicky vybrat tři sudá čísla 4, $n-3$, $n-1$, přičemž $4 < n-3 < n-1$, se součtem $4 + (n-3) + (n-1) = 2n$, který je dělitelný číslem n.

Z množin $\{1, 2\}$ (pro $n = 3$), $\{1, 2, 3, 4\}$ (pro $n = 5$) a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (pro $n = 7$) zřejmě nelze vybrat ani dvě, ani tři různá sudá čísla s požadovanou vlastností.

Podmínce úlohy vyhovují číslo $n = 6$ a všechna přirozená čísla $n \geqq 8$.

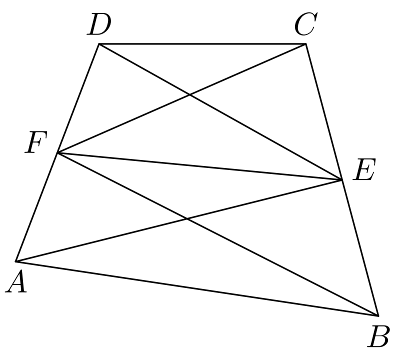
Návodné úlohy:

1. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která lze z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ vybrat několik navzájem různých čísel, jejichž součet je dělitelný číslem $2n$. [$n \geqq 3$]
2. Pro která přirozená čísla n lze z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ vybrat několik navzájem různých čísel, jejichž součin je dělitelný číslem n^2? [Všechna složená čísla $n > 4$.]

3. *V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme E střed strany BC a F střed strany AD. Dokažte, že trojúhelníky AED a BFC mají stejný obsah, právě když jsou strany AB a CD rovnoběžné.*

Řešení. Příčka EF daného čtyřúhelníku $ABCD$ je v každém z trojúhelníků AED i BFC těžnicí (obr. 1), což znamená, že pro jejich obsahy platí

$$\begin{aligned} S(AED) &= 2S(FED) = 2S(FEA), \\ S(BFC) &= 2S(FEC) = 2S(FEB). \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 1

Oba trojúhelníky FED, FEC mají společnou stranu FE a jejich obsahy jsou stejné, právě když $CD \parallel FE$. Podobně i trojúhelníky FEA, FEB mají společnou stranu FE

a jejich obsahy jsou stejné, právě když $AB \parallel FE$. Proto mají-li trojúhelníky AED a BFC stejný obsah, je $CD \parallel FE$ a $AB \parallel FE$, tedy $AB \parallel CD$.

Je-li obráceně $AB \parallel CD$, je střední příčka EF lichoběžníku $ABCD$ rovnoběžná s oběma základnami AB a CD, takže dle předchozí úvahy $S(FED) = S(FEC)$ a podle (1) také $S(AED) = S(BFC)$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Návodné úlohy:

1. Dokažte, že v každém lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD jsou si rovny obsahy trojúhelníků ADP a BCP, kde P je průsečík úhlopříček lichoběžníku. [Uvažte, že právě o zmíněné trojúhelníky se liší trojúhelníky ABC a ABD.]
2. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC je obsah trojúhelníků ABP, BCP a CAP stejný, právě když P je těžištěm trojúhelníku ABC. [$S(APC) = S(BPC)$, právě když bod P leží na těžnici z vrcholu C.]

4. *Tři čtyřmístná čísla k, l, m jsou stejného tvaru $ABAB$ (tj. číslice na místě jednotek je stejná jako číslice na místě stovek a číslice na místě desítek je stejná jako číslice na místě tisíců). Číslo l má číslici na místě jednotek o 2 větší a číslici na místě desítek o 1 menší než číslo k. Číslo m je součtem čísel k a l a je dělitelné devíti. Určete všechna taková čísla k.*

Řešení. Aby bylo číslo $m = \overline{CDCD}$ dělitelné devíti, musí být součet $2(C + D)$ jeho číslic dělitelný devíti, tudíž i součet $C + D$ musí být dělitelný devíti, neboli číslo $\overline{CD}$ musí být dělitelné devíti.

Má-li číslo k číslice A, B, A, B, má číslo l číslice $A-1$, $B+2$, $A-1$, $B+2$. Jelikož číslo $B + (B + 2) = 2B + 2$ je sudé, je číslice D čísla $m = k + l$ sudá. Proto připadají vzhledem k dělitelnosti devíti v úvahu jen tato čísla m: 1 818, 3 636, 5 454, 7 272, 9 090. Protože číslice C je ve všech případech lichá a součet číslic $A + (A - 1) = 2A - 1$ je rovněž lichý, nemůže být $B + (B + 2) > 10$, tedy $B + (B + 2) = D$ a $A + (A - 1) = C$. Odtud už snadno určíme odpovídající číslice C, D a čísla k, l zapíšeme do následující tabulky:

m	1 818	3 636	5 454	7 272	9 090
k	1 313	2 222	3 131	4 040	neexistuje
l	0 505	1 414	2 323	3 232	neexistuje

Číslo 0505 není čtyřmístné, proto jsou řešením úlohy pouze čísla $k \in \{2\,222, 3\,131, 4\,040\}$

Návodné úlohy:

1. Trojmístné číslo m je dělitelné číslem 18 a lze je napsat jako součet čísla dvojmístného a jeho padesátinásobku. Určete všechna čísla m této vlastnosti. [$m = 51 \cdot 18$]
2. Najděte všechna trojmístná čísla, která mají tu vlastnost, že součet druhých mocnin jejich číslic je 118 a součet jejich číslic se rovná poslednímu dvojčíslí uvažovaného trojmístného čísla. [916]
3. K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli čtyřmístné přirozené číslo n. Získali jsme čtyřmístné číslo s opačným pořadím číslic, než má číslo n. Určete všechny takové dvojice čísel m a n. [MO C 52–I–5]

5. *Určete počet všech trojic dvojmístných přirozených čísel a, b, c, jejichž součin abc má zápis, ve kterém jsou všechny číslice stejné. Trojice lišící se pouze pořadím čísel považujeme za stejné, tj. započítáváme je pouze jednou.*

Řešení. Pro dvojmístná čísla a, b, c je součin abc číslo čtyřmístné, nebo pětimístné, nebo šestimístné. Jsou-li proto všechny číslice čísla abc rovny téže číslici k, platí jedna z rovností $abc = k \cdot 1\,111$, $abc = k \cdot 11\,111$ či $abc = k \cdot 111\,111$, $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Čísla $1\,111 = 11 \cdot 101$ a $11 \cdot 111 = 41 \cdot 271$ mají ovšem ve svém rozkladu trojmístná prvočísla, takže nemohou být součinem dvojmístných čísel. Zbývá proto jediná možnost:

$$abc = k \cdot 111\,111 = k \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

Podívejme se, jak mohou být prvočísla 3, 7, 11, 13, 37 rozdělena do jednotlivých činitelů a, b, c. Protože součiny $37 \cdot 3$ a $3 \cdot 7 \cdot 11$ jsou větší než 100, musí být prvočíslo 37 samo jako jeden činitel a zbylá čtyři prvočísla 3, 7, 11, 13 musí být rozdělena do dvojic. Jelikož i součin $11 \cdot 13$ je větší než 100, připadají do úvahy pouze rozdělení na činitele $3 \cdot 11$, $7 \cdot 13$ a 37, nebo na činitele $3 \cdot 13$, $7 \cdot 11$ a 37. K těmto činitelům ještě připojíme možné činitele z rozkladu číslice k a dostaneme řešení dvou typů:

$$a = 33k_1,\ b = 91,\ c = 37k_2, \quad \text{kde } k_1 \in \{1, 2, 3\},\ k_2 \in \{1, 2\},$$
$$a = 39k_1,\ b = 77,\ c = 37k_2, \quad \text{kde } k_1 \in \{1, 2\},\ k_2 \in \{1, 2\},$$

Hledaný počet trojic čísel a, b, c je tedy $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$.

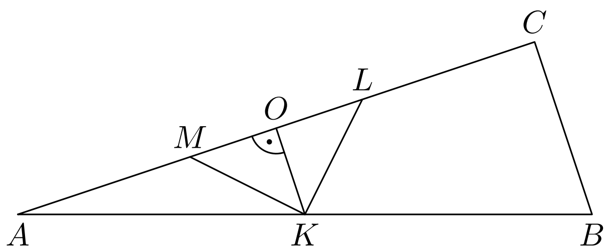
Návodné úlohy:

1. Určete počet všech dvojic dvojmístných přirozených čísel a, b, jejichž součin ab má zápis, ve kterém jsou všechny číslice sudé a stejné. Dvojice lišící se pouze pořadím čísel považujeme za stejné, tj. započítáváme je pouze jednou. [6]
2. Určete počet všech dvojic trojmístných přirozených čísel a, b, jejichž součin ab má zápis, ve kterém jsou všechny číslice stejné. Dvojice lišící se pouze pořadím čísel považujeme za stejné, tj. započítáváme je pouze jednou. [26]

6. *V trojúhelníku ABC se stranou BC délky 2 cm je bod K středem strany AB. Body L a M rozdělují stranu AC na tři shodné úsečky. Trojúhelník KLM je rovnoramenný a pravoúhlý. Určete délky stran AB, AC všech takových trojúhelníků ABC.*

Řešení. Body L a M na straně AC zvolíme tak, aby $|AM| = |ML| = |LC|$. Těžnice KO trojúhelníku KLM je střední příčkou trojúhelníku ABC, platí tedy $|KO| = \frac{1}{2}|BC|$, $|AC| = 6|MO|$ a $|AB| = 2|AK|$. Rozlišíme tři možnosti:

(a) Nechť $|KL| = |KM|$ (obr. 2). Pak je $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle MOK| = 90^\circ$ a $|MO| =$



Obr. 2

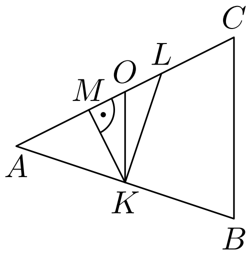
$= |KO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKO plyne

$$|AK| = \sqrt{(3|MO|)^2 + |KO|^2} = \sqrt{10|KO|^2} = \sqrt{10}|KO| = \tfrac{1}{2}\sqrt{10}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \sqrt{10}|BC| = 2\sqrt{10}\,\mathrm{cm},$$
$$|AC| = 6|MO| = 6|KO| = 3|BC| = 6\,\mathrm{cm}.$$

(b) Nechť $|ML| = |MK|$ (obr. 3). Pak je $|\sphericalangle KML| = 90^\circ$ a $|AM| = |ML| =$



Obr. 3

$= |MK| = 2|MO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník KMO plyne

$$|KO| = \sqrt{|MO|^2 + (2|MO|)^2} = \sqrt{5}|MO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{cm}.$$

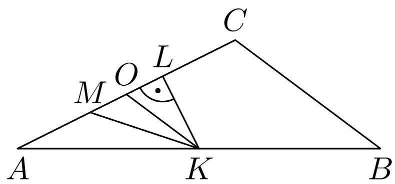
Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKM plyne

$$|AK| = \sqrt{|AM|^2 + |MK|^2} = \sqrt{2}|MK| = 2\sqrt{2}|MO| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|KO| = \frac{\sqrt{10}}{5}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|BC| = \frac{4\sqrt{10}}{5}\ \mathrm{cm}.$$

(c) Nechť $|ML| = |KL|$ (obr. 4). Pak je $|\sphericalangle MLK| = 90^\circ$. Je tedy $|KL| = |ML| =$



Obr. 4

$= 2|LO| = 2|MO|$ a $|AL| = |AM| + |ML| = 4|MO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník KLO tak plyne

$$|KO| = \sqrt{|LO|^2 + (2|LO|)^2} = \sqrt{5}|LO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = 6|LO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\,\text{cm}.$$

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKL plyne

$$\begin{aligned}|AK| &= \sqrt{|AL|^2 + |LK|^2} = \sqrt{(4|LO|)^2 + (2|LO|)^2} = \\ &= 2\sqrt{5}|LO| = 2|KO| = |BC| = 2\,\text{cm},\end{aligned}$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = 2|BC| = 4\,\text{cm}.$$

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Trojúhelník má délky stran 4 cm, 5 cm, 6 cm. Určete velikosti výšek a těžnic tohoto trojúhelníku. [Návod: Označme x vzdálenost paty výšky od středu strany délky 4, pak podle Pythagorovy věty $(2 + x)^2 + 6^2 = (2 - x)^2 + 5^2$, atd.]
2. Obdélník $ABCD$ má strany délek a, b. Bod M je patou kolmice vedené vrcholem B k úhlopříčce AC. Vypočtěte délky úseček AM, CM, BM. [$|MB| = ab/\sqrt{a^2 + b^2}$, $|AM| = \sqrt{a^2 - |MB|^2}$.]