54. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie A

1. Určete počet všech nekonečných aritmetických posloupností celých čísel, které mají mezi svými prvními deseti členy obě čísla 1 a 2 005.

2. V rovnoběžníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Označme K, L, M a N po řadě body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD, BCD, ABC a ABD s příslušnou úhlopříčkou AC, resp. BD. Dokažte, že $KLMN$ je obdélník.

3. Zjistěte, pro která přirozená čísla k má soustava nerovnic

$$k(k-2) \leqq \left(k + \frac{1}{k}\right)x \leqq k^2(k+3)$$

s neznámou x a parametrem k právě $(k+1)^2$ řešení v oboru celých čísel.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie A se koná

v úterý 7. prosince 2004

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje.

1. Posuďme otázku, pro které celočíselné aritmetické posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ existují indexy $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$ takové, že $a_i = 1$ a $a_j = 2\,005$. Zdůrazněme, že taková dvojice indexů (i, j), pokud vůbec existuje, je jediná, neboť v nekonstantní aritmetické posloupnosti se každé číslo vyskytuje nejvýše jednou.

Předpokládejme, že zmíněné indexy i a j známe, a pomocí nich vyjádřeme první člen a_1 a diferenci d dotyčné posloupnosti. Protože obecný člen aritmetické posloupnosti má vyjádření $a_k = a_1 + (k-1)d$, dostáváme soustavu rovnic

$$a_i = a_1 + (i-1)d = 1 \qquad \text{a} \qquad a_j = a_1 + (j-1)d = 2\,005,$$

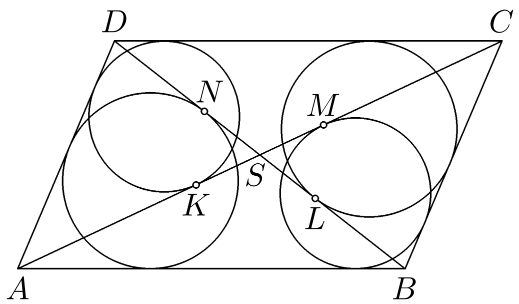
kterou snadno vyřešíme vzhledem k neznámým a_1, d:

$$d = \frac{2\,004}{j-i} \quad \text{a} \quad a_1 = 1 - \frac{2\,004(i-1)}{j-i}.$$

Takové hodnoty a_1, d jsou celá čísla, právě když je přirozené číslo $|j-i|$ dělitelem čísla $2\,004$, takže $|j-i|$ musí být jedno z čísel 1, 2, 3, 4 nebo 6 (z podmínky $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$ totiž plyne $|j-i| < 10$ a číslo $2\,004$ jiné jednomístné dělitele nemá). Hledaný počet posloupností je proto roven počtu dvojic indexů (i, j) vybraných z množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$, pro které platí $|j-i| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Takových dvojic (i, j) je po řadě $2 \cdot 9$, $2 \cdot 8$, $2 \cdot 7$, $2 \cdot 6$ a $2 \cdot 4$, takže všech posloupností je $18 + 16 + 14 + 12 + 8 = 68$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za takové považujte i řešení, ve kterém není výslovně uvedeno, že v dané aritmetické posloupnosti jsou podmínkami $a_i = 1$, $a_j = 2\,005$ indexy i, j určeny jednoznačně. Pokud řešitel určí správně počet 34 posloupností s kladnou diferencí d, avšak možnost $d < 0$ opomene, strhněte 2 body.

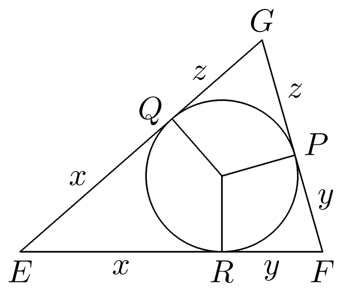
2. Rovnoběžník $ABCD$ je útvar středově souměrný podle průsečíku S úhlopříček AC, BD (obr. 1). Proto jsou podle středu S souměrně sdružené trojúhelníky ACD a CAB, tudíž i jejich kružnice vepsané a odpovídající si body dotyku K a M. Totéž platí i o dvojici



Obr. 1

bodů L a N. Docházíme tak k závěru, že $KLMN$ je rovnoběžník. (Možnosti $K = M = S$ nebo $L = N = S$ jsou vyloučeny podmínkou $|AB| > |BC|$, jež zaručuje, že zmíněné trojúhelníky nejsou rovnoramenné se základnou AC nebo BD, takže se vepsané kružnice nedotýkají těchto stran v jejich středu.)

Provedená úvaha o středové souměrnosti však nestačí k důkazu toho, že rovnoběžník $KLMN$ je obdélník, tj. že má shodné úhlopříčky KM a LN. K tomu budeme muset provést výpočet založený na známých vzorcích, které vyjadřují vzdálenosti vrcholů obecného trojúhelníku od bodů dotyku kružnice vepsané pomocí délek stran tohoto trojúhelníku (obr. 2):



Obr. 2

$$x = |ER| = |EQ| = \frac{|EF| + |EG| - |FG|}{2},$$
$$y = |FP| = |FR| = \frac{|FG| + |FE| - |EG|}{2},$$
$$z = |GP| = |GQ| = \frac{|GF| + |GE| - |EF|}{2}.$$

Připomeňme, že tyto vzorce plynou ze soustavy rovnic

$$x + y = |EF|, \quad y + z = |FG|, \quad x + z = |EG|.$$

Vraťme se k naší úloze a v daném čtyřúhelníku $ABCD$ označme ještě délky $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |AD|$, $e = |AC|$ a $f = |BD|$. Podle vzorců uvedených vedle obr. 2 platí rovnosti

$$|AK| = \frac{e + b - a}{2} = |CM| \qquad \text{a} \qquad |BL| = \frac{f + b - a}{2} = |DN|.$$

Z předpokladu úlohy $a > b$ proto plyne $|AK| < \frac{1}{2}e = |AS|$, takže bod K leží mezi body A a S a má od středu S vzdálenost

$$|KS| = |AS| - |AK| = \frac{e}{2} - \frac{e + b - a}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

Obdobně vyjde, že body L, M, N leží po řadě na úsečkách BS, CS, DS a platí rovnosti $|LS| = |MS| = |NS| = \frac{1}{2}(a - b)$. To dohromady znamená, že čtyřúhelník $KLMN$ má shodné úhlopříčky, které se navzájem půlí; je to tedy obdélník. (Kdyby to byl čtverec, muselo by platit $KM \perp LN$, tedy $AC \perp BD$, což je ve sporu s tím, že $a \neq b$.)

Dodejme, že v předchozím odstavci jsme podali úplné řešení, které nevyžaduje úvahy o středové souměrnosti z úvodního odstavce.

Za úplné řešení udělte 6 bodů (absenci zdůvodnění, proč pravoúhelník $KLMN$ není čtverec, tolerujte). Dokáže-li řešitel pouze, že $KLMN$ je rovnoběžník, udělte 2 body. Chybí-li v jinak úplném řešení potřebné zdůvodnění, ve kterých „polovinách“ úhlopříček AC, BD body K, L, M, M leží, udělte 5 bodů.

3. Po vydělení (kladným) číslem $k + \dfrac{1}{k}$ a úpravě zlomků dostaneme ekvivalentní soustavu nerovnic

$$\frac{k^2(k-2)}{k^2+1} \leqq x \leqq \frac{k^3(k+3)}{k^2+1}. \tag{1}$$

Abychom určili, mezi kterými celými čísly leží oba zlomky z (1), vydělíme nejprve (se zbytkem) mnohočleny z jejich čitatelů mnohočlenem ze jmenovatele:

$$
\begin{aligned}
(k^3 - 2k^2) : (k^2 + 1) &= k - 2, && \text{zbytek } -k + 2,\\
(k^4 + 3k^3) : (k^2 + 1) &= k^2 + 3k - 1, && \text{zbytek } -3k + 1.
\end{aligned}
$$

Oba výsledky dělení dosadíme do (1):

$$
k - 2 - \frac{k-2}{k^2+1} \leqq x \leqq k^2 + 3k - 1 - \frac{3k-1}{k^2+1}. \tag{2}
$$

Pokud pro „zbytkové členy“ z obou krajních výrazů budou platit nerovnosti

$$
0 \leqq \frac{k-2}{k^2+1} < 1 \qquad \text{a} \qquad 0 < \frac{3k-1}{k^2+1} \leqq 1, \tag{3}
$$

budou řešeními soustavy (1) právě ta celá x, pro která platí $k - 2 \leqq x \leqq k^2 + 3k - 2$. Takových x je

$$
(k^2 + 3k - 2) - (k - 2) + 1 = (k + 1)^2,
$$

což je právě počet uvedený v zadání úlohy.

Snadno vysvětlíme, že nerovnosti (3) platí pro každé $k \geqq 2$. Tehdy totiž máme $0 \leqq k - 2 < k + 1 < k^2 + 1$, odkud plyne levá část (3). Pravá část (3) je zřejmá pro každé $k \geqq 3$ (neboť tehdy $0 < 3k - 1 \leqq k^2 - 1 < k^2 + 1$); pro $k = 2$ platí $3k - 1 = 5 = k^2 + 1$, takže v (3) úplně napravo nastane rovnost.

Ještě je nutné zjistit, zda požadovanou vlastnost nemá i „zbylé“ přirozené číslo $k = 1$; pro ně však má soustava (1) tvar $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$, takže má v celých číslech právě tři řešení, což je méně než $(1 + 1)^2 = 4$.

Závěr: Hledaná k jsou všechna přirozená čísla větší než 1.

Poznámka: Přesný počet celých čísel x, jež leží v intervalu (1), nelze určit z pouhé *délky* tohoto intervalu, neboť ani tato délka, ani žádný z krajních bodů intervalu není celé číslo. Není těžké ověřit ekvivalentními úpravami, že pro délku intervalu (1) při každém $k > 2$ platí nerovnosti

$$
(k + 1)^2 - 1 < \frac{k^3(k+3)}{k^2+1} - \frac{k^2(k-2)}{k^2+1} < (k + 1)^2. \tag{4}
$$

Z nich ovšem plyne pouze, že počet celých čísel v intervalu (1) je roven buď číslu $(k+1)^2-1$, nebo číslu $(k + 1)^2$. K přesnému určení tohoto počtu se zdá být nezbytné určit nejmenší celé číslo $(k - 2)$ a největší celé číslo $(k^2 + 3k - 2)$, která v daném intervalu leží.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za určení intervalu (1), 3 body za rozklady (2) a 2 body za diskusi o nerovnostech (3). Pokud řešitel určí interval (1) a dále pouze dokáže, mezi kterými celými čísly leží jeho *délka* (nerovnosti (4)), udělte celkem 4 body.