54. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie B

1. Na stole leží 54 hromádky o 1, 2, 3, …, 54 kamenech. V každém kroku vybereme libovolnou hromádku, řekněme o k kamenech, a odebereme ji celou ze stolu spolu s k kameny z každé té hromádky, ve které je aspoň k kamenů. Například po prvním kroku, při kterém vybereme hromádku o 52 kamenech, zůstanou na stole hromádky o 1, 2, 3, …, 51, 1 a 2 kamenech. Předpokládejme, že po určitém počtu kroků zůstane na stole jediná hromádka. Zdůvodněte, kolik kamenů v ní může být.

2. Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník se stranami $a < b < c$. Označme Q střed odvěsny BC a S střed přepony AB. Průsečík osy úsečky AB s odvěsnou CA označme R. Dokažte, že $|RQ| = |RS|$, právě když

$$a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3.$$

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = \frac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ označuje největší celé číslo, jež nepřevyšuje číslo a.

Školní – klauzurní část I. kola kategorie B se koná

v úterý 25. ledna 2005

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Pokud v každém kroku zvolíme hromádku s největším počtem kamenů, budeme postupně odebírat hromádky s 54, 53, 52, ... kameny a po 53. kroku zůstane na stole jediná hromádka s jedním kamenem.

Dokážeme, že při libovolném postupu zůstane v poslední hromádce jediný kamen. Ukážeme totiž, že po každém kroku, po němž na stole zbývá aspoň jedna hromádka, tvoří počty kamenů v jednotlivých hromádkách vždy *celou* množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ pro vhodné přirozené n (nevylučujeme ovšem, že k některým číslům existuje více hromádek s týmž počtem kamenů). To tedy znamená, že je vždy na stole aspoň jedna hromádka s právě jedním kamenem.

Na začátku tvoří počty kamenů v hromádkách množinu $\{1, 2, \ldots, 54\}$. Předpokládejme, že po určitém počtu kroků tvoří počty kamenů v jednotlivých hromádkách množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \geqq 2$). Zvolíme-li nyní hromádku s n kameny nebo hromádku s jedním kamenem, budou v dalším kroku počty kamenů v hromádkách tvořit množinu $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Pokud zvolíme hromádku s m kameny, kde $m \notin \{1, n\}$, budou počty kamenů v dalším kroku tvořit množinu $\{1, 2, \ldots, m-1\} \cup \{1, 2, \ldots, n-m\} = \{1, 2, \ldots, p\}$, kde $p = \max\{m-1, n-m\}$. Tím je tvrzení o počtu kamenů v jednotlivých hromádkách dokázáno.

Odpověď. Poslední hromádka bude bez ohledu na zvolený postup vždy obsahovat jediný kamen.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za formulaci hypotézy, že po každém kroku tvoří počty kamenů v hromádkách celou množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$.

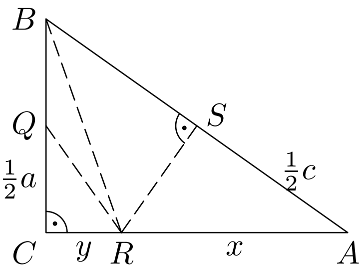
2. Podle Pythagorovy věty je v pravoúhlém trojúhelníku rovnost $a^2 : b^2 = 1 : 2$ splněna, právě když $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Stačí tedy dokázat požadovanou ekvivalenci jen pro jednu z rovností $a^2 : b^2 = 1 : 2$, $b^2 : c^2 = 2 : 3$.

Trojúhelníky ASR a ACB (obr. 1) mají společný úhel při vrcholu A a shodují se v pravých úhlech ASR a ACB, takže jsou podobné (uu). Odtud vyplývá rovnost

$$\frac{|AR|}{|AS|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

neboli

$$x = |AR| = \frac{|AB| \cdot |AS|}{|AC|} = \frac{c^2}{2b}. \qquad (1)$$

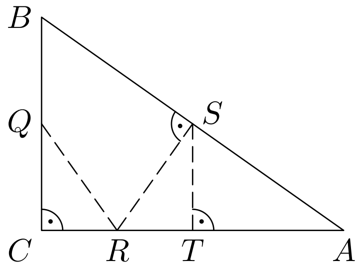


Obr. 1

Podle Pythagorovy věty je $|RS|^2 = |AR|^2 - |AS|^2 = x^2 - \frac{1}{4}c^2$ a $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = \frac{1}{4}a^2 + (b-x)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 - 2bx + x^2$, takže $|RQ| = |RS|$, právě když $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + b^2 = 2bx$, což po dosazení z (1) a $a^2 = c^2 - b^2$ po úpravě dává $\frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{2}c^2$, neboli $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Tím je požadovaná ekvivalence dokázána.

Jiné řešení. Podle Pythagorovy věty je (obr. 1) $|BR|^2 = |BC|^2 + |CR|^2 = a^2 + y^2$, $|RS|^2 = |BR|^2 - |BS|^2 = a^2 + y^2 - \frac{1}{4}c^2$, $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = \frac{1}{4}a^2 + y^2$. Rovnost $|RQ| = |RS|$ tedy platí, právě když $a^2 + y^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}a^2 + y^2$, neboli $3a^2 = c^2$. V pravoúhlém trojúhelníku je tato rovnost ekvivalentní s rovností $3b^2 = 2c^2$, neboli $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

Jiné řešení. Označme T střed strany AC (obr. 2). Protože $|QC| = |ST|$ a $|\sphericalangle QCR| = |\sphericalangle STR| = 90°$, jsou trojúhelníky QCR a STR shodné, právě když $|RQ| = |RS|$ a zároveň právě když $|RC| = |RT|$. Rovnost $|RQ| = |RS|$ je tedy ekvivalentní s tím, že bod R je střed úsečky CT, tj. $x = |RA| = \frac{3}{4}b$. Z podobnosti trojúhelníků $ABC \sim ARS$ máme (stejně jako v prvním řešení)



Obr. 2

$$x = \frac{c^2}{2b},$$

takže $|RQ| = |RS|$, právě když

$$\frac{3b}{4} = \frac{c^2}{2b}, \quad \text{neboli} \quad 3b^2 = 2c^2.$$

V pravoúhlém trojúhelníku je to dle Pythagorovy věty ekvivalentní s rovností $3a^2 = c^2$, neboli $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. 1 bod udělte za zjištění, že stačí dokazovat jen jednu z rovností $a^2 : b^2 = 1 : 2$, $b^2 : c^2 = 2 : 3$, 3 body za vyjádření délek $|RQ|$, $|RS|$ pomocí stran trojúhelníku ABC. Zbývající 2 body udělte za dokončení ekvivalence.

3. Výraz $\left\lfloor \dfrac{x}{1-x} \right\rfloor$ je celé číslo, proto i $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor} = \dfrac{1}{1 - \lfloor x \rfloor} - 1$ je celé, což znamená, že $1 - \lfloor x \rfloor \in \{-1, 1\}$, neboli $\lfloor x \rfloor \in \{0, 2\}$.

Nechť $\lfloor x \rfloor = 0$. Potom $0 \leqq x < 1$ a daná rovnice má tvar

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = 0,$$

takže je splněna, právě když $0 \leqq \dfrac{x}{1-x} < 1$, což je s ohledem na předpoklad $1 - x > 0$ ekvivalentní s nerovnostmi $0 \leqq x < \frac{1}{2}$. V tomto případě dané rovnici vyhovují všechna x z intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right)$.

Nechť $\lfloor x \rfloor = 2$. Potom $2 \leqq x < 3$ a daná rovnice má tvar

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = -2,$$

takže je splněna, právě když $-2 \leqq \dfrac{x}{1-x} < -1$, což je s ohledem na předpoklad $2 \leqq x$ (takže $1 - x < 0$) ekvivalentní s nerovnostmi $-2 + 2x \geqq x > -1 + x$, neboli $x \geqq 2$. V tomto případě dané rovnici vyhovují všechna x z intervalu $\langle 2, 3)$.

Závěr. Všechna řešení dané rovnice tvoří množinu $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right) \cup \langle 2, 3)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. 1 bod dejte za zjištění, že $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor}$ je celé číslo, další bod za $\lfloor x \rfloor \in \{0, 2\}$. Za odvození soustavy nerovností a její vyřešení v každém z obou případů udělte po 2 bodech. Pokud chybí správný závěr, že vyhovují všechna $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right) \cup \langle 2, 3)$, strhněte jeden bod.