54. ročník matematické olympiády

Úlohy školní – klauzurní části I. kola kategorie C

1. Najděte všechny trojice celých čísel x, y, z, pro které platí

$$x + yz = 2\,005,$$
$$y + xz = 2\,006.$$

2. Pro která přirozená čísla n lze z množiny $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}$ vybrat čtyři navzájem různá čísla a, b, c, d tak, že platí $ab = cd$?

3. Je dána úsečka AB. Sestrojte bod C tak, aby se obsah trojúhelníku ABC rovnal $1/8$ obsahu S čtverce o straně AB a součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se rovnal S. Kolik má úloha řešení pro dané umístění úsečky AB v rovině?

Školní – klauzurní část I. kola kategorie C se koná

v úterý 25. ledna 2005

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje.

1. Odečtením první rovnice od druhé dostaneme

$$(x-y)(z-1)=1,$$

odkud plyne, že buď platí $x-y=z-1=1$, nebo $x-y=z-1=-1$.

V prvním případě je $z=2$, $y=x-1$ a po dosazení do kterékoli z původních rovnic určíme $x=669$, takže $y=668$.

Ve druhém případě je $z=0$, $y=x+1$, takže $x=2\,005$ a $y=2\,006$.

Řešením jsou dvě trojice $x=669$, $y=668$, $z=2$ a $x=2\,005$, $y=2\,006$, $z=0$.

Jiné řešení. Z první rovnice vyjádříme

$$x=2\,005-yz$$

a tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice, kterou upravíme:

$$y+2\,005z-yz^2=2\,006,$$
$$y(1-z^2)=2\,005(1-z)+1.$$

Z dané soustavy je zřejmé, že nemůže být $z=1$, takže můžeme psát

$$y(1+z)=2\,005+\frac{1}{1-z}.$$

Levá strana poslední rovnosti je celá, proto musí být celá i pravá strana. Této podmínce vyhovuje jedině $z=0$ a $z=2$.

Stejně jako v předchozím řešení dosazením do kterékoli rovnice původní soustavy dopočteme $x=669$, $y=668$ pro $z=2$ a $x=2\,005$, $y=2\,006$ pro $z=0$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za každé chybějící řešení strhněte 2 body.

2. Pro $n=1$ a $n=2$ má daná množina méně než čtyři prvky.

Jelikož pro každé přirozené číslo n platí

$$n(2n+2)=2n(n+1),$$

mohli bychom zvolit $a=n$, $b=2n+2$, $c=2n$, $d=n+1$. Tato čísla jsou vzájemně různá pro každé $n>1$, neboť pro taková n platí $n<n+1<2n<2n+2$. Ještě zbývá ověřit, pro která čísla n je $2n+2\leqq n^2$, aby takto zvolená čtyři čísla a, b, c, d byla z dané množiny. Je vidět, že tato poslední nerovnost platí pro každé $n>2$, neboť je ekvivalentní s nerovností $3\leqq(n-1)^2$.

Můžeme tedy shrnout, že požadovaná čísla a, b, c, d lze z dané množiny vybrat pro každé přirozené číslo $n>2$.

Jiné řešení. Pro $n=1$ a $n=2$ má daná množina méně než čtyři prvky.

Jelikož pro každé přirozené číslo n platí

$$n\cdot 6n=2n\cdot 3n,$$

mohli bychom zvolit $a = n$, $b = 6n$, $c = 2n$, $d = 3n$. Tato čísla jsou vzájemně různá pro každé n, neboť $n < 2n < 3n < 6n$. Ještě zbývá ověřit, pro která čísla n je $6n \leqq n^2$, aby zvolená čtyři čísla a, b, c, d byla z dané množiny. Je vidět, že tato poslední nerovnost platí pro každé $n > 5$.

Pro $n = 3$ vybereme $a = 3$, $b = 8$, $c = 6$, $d = 4$ (viz předchozí řešení), pro $n = 4$ vybereme $a = 4$, $b = 10$, $c = 8$, $d = 5$ (viz předchozí řešení), nebo $a = 5$, $b = 12$, $c = 6$, $d = 10$ (viz následující poznámku), pro $n = 5$ vybereme $a = 5$, $b = 12$, $c = 10$, $d = 6$ (viz předchozí řešení).

Můžeme tedy shrnout, že požadovaná čísla a, b, c, d lze z dané množiny vybrat pro každé přirozené číslo $n > 2$.

Poznámka. Čtveřic vzájemně různých čísel a, b, c, d, která splňují dané podmínky, je mnoho. Pokaždé je ale třeba u takové čtveřice určit, od kterého nejmenšího čísla n dané podmínky platí, a pro zbylá přirozená čísla n je třeba určit konkrétní hodnoty čísel a, b, c, d.

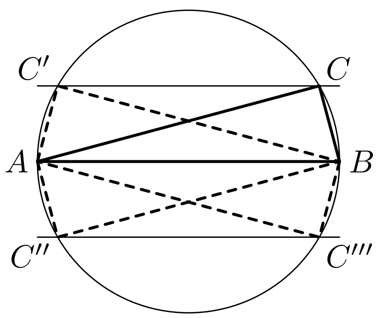
Tak např. je možné volit $a = n$, $b = 3n + 3$, $c = 3n$, $d = n + 1$ pro $n > 3$, nebo $a = n+1$, $b = 2n+4$, $c = 2(n+1)$, $d = n+2$ pro $n > 3$ (viz druhé řešení pro $n = 4$) apod.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za nezdůvodnění různosti čísel a, b, c, d strhněte 1 bod. Za nezdůvodnění, že čísla a, b, c, d patří do dané množiny, strhněte 1 bod. Při volbě takové obecné čtveřice čísel a, b, c, d, kdy je třeba najít konkrétní čísla a, b, c, d pro několik prvních čísel n, strhněte 2 body, pokud tato počáteční konkrétní čísla chybí.

3. Podmínka, že obsah trojúhelníku ABC se má rovnat $\frac{1}{8}$ obsahu S čtverce o straně AB, znamená, že výška trojúhelníku ABC na stranu AB má délku $\frac{1}{4}|AB|$, takže bod C musí ležet na jedné ze dvou rovnoběžek s přímkou AB vzdálených $\frac{1}{4}|AB|$ od přímky AB.

Podmínka, že součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se má rovnat obsahu čtverce o straně AB, znamená podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC, že je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou AB, takže bod C musí ležet na kružnici se středem ve středu přepony AB a poloměrem $\frac{1}{2}|AB|$.

Konstrukce bodu C je tedy jednoduchá. Obě zmíněné rovnoběžky zřejmě protnou kružnici nad průměrem AB ve čtyřech bodech (obr. 1). Vzhledem k tomu, že se jedná o polohovou úlohu, má úloha čtyři řešení.



Obr. 1

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za správné určení počtu řešení. Za zjištění, že bod C leží na určených rovnoběžkách s přímkou AB, udělte 2 body. Za důkaz, že bod C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB, udělte 2 body. Za uvedení, že úloha má dvě řešení, udělte 1 bod, za uvedení, že úloha má čtyři řešení, udělte 2 body. Pokud nebude uveden žádný počet řešení, neudělte žádný z 2 bodů určených k tomuto účelu.